Diskrete Mathematik für Informatikstudien
Sommersemester 2020

9. Übungsblatt (19.5.2020)

Beispiel 9.1. Gegeben sind $k, m, n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Vor den Hörsälen A und B befinden sich n Studierende. Von diesen gehen k Studierende in den Hörsaal A und m Studierende in den Hörsaal B, der Rest bleibt draußen (hierfür nehmen wir offensichtlich $n \geq k + m$ an). Argumentieren Sie, dass sich die Anzahl der Möglichkeiten hierfür sowohl als

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m} \qquad \text{als auch als} \qquad \binom{n}{m}\binom{n-m}{k}$$

darstellen lässt. Rechnen Sie anschließend anhand der Formel für Binomialkoeffizienten nach, dass beide Ausdrücke die gleiche Zahl liefern.

(b) In einer Lotterie „k aus $n+1$“ werden von $n+1$ nummerierten Kugeln k gezogen. Außerdem wird eine weitere Kugel als „Zusatzzahl“ gezogen (hierfür nehmen wir offensichtlich $k + 1 \leq n + 1$ an). Argumentieren Sie, dass man die Anzahl der möglichen Ergebnisse einer Lottoziehung auf die folgenden drei Arten darstellen kann.

$$\binom{n+1}{k}(n-k+1), \qquad (n+1)\binom{n}{k} \quad \text{und} \quad \binom{n+1}{k+1}(k+1).$$

Rechnen Sie anschließend nach, dass diese drei Ausdrücke alle die gleiche Zahl liefern.

Beispiel 9.2. Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{k+n-1}{k}$$

gilt und folgern Sie mit Hilfe des verallgemeinerten binomischen Lehrsatzes, dass

$$\frac{1}{(1-\lambda x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} \lambda^k x^k.$$

Beispiel 9.3. Bestimmen Sie durch Partialbruchzerlegung die Reihenentwicklung von

$$f(x) = \frac{25}{1 + 4x - 3x^2 - 18x^3}\,.$$

Beispiel 9.4. Gegeben ist $a_n = 19^n + n(-5)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Finden Sie geschlossene Ausdrücke (im Sinne von $F(x) = e^x + \frac{1}{1+x} - \ln(x)$ oder ähnlich) für die Potenzreihen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{und} \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Letztere Potenzreihe bezeichnet man als *exponentielle erzeugende Funktion* der Folge (a_n).

Hinweis: Es gilt $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Beispiel 9.5. Ermitteln Sie die Koeffizienten der erzeugenden Potenzreihe

$$F(x) = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)$$

auf zwei Arten:

(a) indem Sie zuerst $F(x)$ durch Differentialrechnung ausrechnen und danach die Koeffizienten bestimmen;

(b) indem Sie die erzeugende Potenzreihe für $\frac{1}{1-x}$ einsetzen und die Potenzreihen differenzieren. Erinnerung:

$$\frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) x^n.$$

Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse und folgern Sie hieraus

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$