Tutorium Mathematik I, M

Blatt 1

23. Oktober 2020

***Aufgabe 1.1.** Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x und alle komplexen Zahlen z, die

$$\left|x^2 + x - 6\right| + |x+3| \leq 7 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{2z^2 - (5+5i)z + 1 - 5i}{z^2 - (3+5i)z - 3i} = 1$$

erfüllen.

***Aufgabe 1.2.** Zeichnen Sie die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = \sqrt{2}\,|z-1|\}$$

in die Gaußsche Zahlenebene ein.

Aufgabe 1.3. Ermitteln Sie jeweils alle reellen Zahlen x, welche die Ungleichungen

(a) $|x-2| + |x+3| \leq 4$

(b) $\left|x^2 + 1\right| + |x-1| \leq 2$

erfüllen.

Aufgabe 1.4. Ermitteln Sie jeweils alle komplexen Zahlen z, welche die Gleichungen

(a) $\dfrac{z^2 + (1+3i)z + 8 + 3i}{z^2 - (3+5i)z - 3i} = 1$

(b) $\dfrac{2z^2 - 3z + 3 - i}{z^2 - 3z + 3 + i} = 1$

erfüllen.

Aufgabe 1.5. Zeichnen Sie die Mengen

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| = \operatorname{Im}(z)\}$$
$$M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{(2+3i)} \cdot z - (2+3i) \cdot \overline{z} = -8i\}$$
$$M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{(2+3i)} \cdot z - (2+3i) \cdot \overline{z} = 12\}$$

in die Gaußsche Zahlenebene ein.

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 1.3.

(a) Diese Ungleichung ist für *keine* $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(b) Diese Ungleichung ist für $x \in [0, 1]$ erfüllt.

Lösung von Aufgabe 1.4.

(a) Die einzige Lösung ist $z = -1 + \frac{1}{2}i$.

(b) Die einzige Lösung ist $z = -1 - i$. (Beim Umformen erhält man zunächst noch die zweite Lösung $z = 1 + i$, die aber Nullstelle des Nenners ist.)

Lösung von Aufgabe 1.5. Die Menge M_3 ist leer, weil $\overline{(2+3i)} \cdot z - (2+3i) \cdot \overline{z}$ immer eine imaginäre Zahl ist und daher nie 12 sein kann. Für die anderen beiden Mengen erhalten wir

$$M_1 = \{3 + bi \mid b \geq 0\}, \qquad M_2 = \left\{a + \left(\frac{3}{2}a - 2\right) i \mid a \in \mathbb{R}\right\}.$$

In der Gaußschen Zahlenebene sehen die Mengen wie folgt aus.