

Tutorium Mathematik I, M

Blatt 10

8. Januar 2021

***Aufgabe 10.1.** Ermitteln Sie alle Asymptoten (vertikal, horizontal und schief) der Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2} \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{2x^5 + (x^4 + x) \sin(x)}{x^4 - 2x^3}.$$

Aufgabe 10.2. Ermitteln Sie alle Asymptoten der Funktionen

- (a) $f_1(x) = \frac{e}{x^2 - x - 42}$
- (b) $f_2(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 - 13x + 60}{x^2 - 9}$
- (c) $f_3(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7}$
- (d) $f_4(x) = \frac{x^2 - \tanh(x)}{x + 4}$
- (e) $f_5(x) = \frac{x^2 - x \tanh(x)}{x + 4}$
- (f) $f_6(x) = \left(7 - \frac{3}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
- (g) $f_7(x) = \exp\left(\frac{3}{x^2 - 4}\right)$
- (h) $f_8(x) = \exp\left(\frac{x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\right)$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 10.2. Die in den Bemerkungen genannten „einseitigen Asymptoten“ sind keine Asymptoten in unserem Sinne und müssen dementsprechend auch zur Lösung nicht erwähnt werden. Es handelt sich lediglich um Zusatzbemerkungen.

- (a) Diese Funktion besitzt vertikale Asymptoten bei $x = 7$ und bei $x = -6$ sowie eine horizontale Asymptote $y = 0$.
- (b) Diese Funktion hat eine vertikale Asymptote bei $x = 3$ (die einseitigen Grenzwerte an der zweiten Definitionslücke $x = -3$ sind nicht unendlich) und die schiefe Asymptote $y = 2x - 5$.
- (c) Diese Funktion besitzt weder eine vertikale Asymptote (sie ist überall definiert) noch eine horizontale oder schiefe Asymptote (die Grenzwerte von $f_3(x)/x$ für $x \rightarrow \pm\infty$ existieren zwar, sind aber nicht identisch).

Bemerkung. Würde man schiefe Asymptoten auch einseitig betrachten, dann wäre $y = x$ eine schiefe Asymptote für $x \rightarrow \infty$ und $y = -x$ eine für $x \rightarrow -\infty$.

- (d) Diese Funktion besitzt eine vertikale Asymptote bei $x = -4$ und die schiefe Asymptote $y = x - 4$.
- (e) Diese Funktion besitzt eine vertikale Asymptote bei $x = -4$, aber keine schiefe Asymptote (es gilt zwar $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f_5(x)}{x} = 1$ und es existieren auch die Grenzwerte von $f_5(x) - x$, aber diese sind nicht identisch).

Bemerkung. Würde man schiefe Asymptoten auch einseitig betrachten, dann wäre $y = x - 5$ eine schiefe Asymptote für $x \rightarrow \infty$ und $y = x - 3$ eine für $x \rightarrow -\infty$.

- (f) Diese Funktion besitzt keine vertikalen Asymptoten (die einseitigen Grenzwerte bei $x = 0$ existieren nicht), aber eine horizontale Asymptote $y = 7$.
- (g) Die Funktion hat keine vertikalen Asymptoten (bei $x = \pm 2$ ist zwar jeweils ein einseitiger Grenzwert unendlich, der andere ist aber 0), aber eine horizontale Asymptote $y = 1$.

Bemerkung. Würde man vertikale Asymptoten auch einseitig betrachten, dann wäre bei $x = -2$ eine vertikale Asymptote „von links“ und bei $x = 2$ eine vertikale Asymptote „von rechts“.

- (h) Diese Funktion besitzt eine vertikale Asymptote bei $x = 1$ (an der zweiten Definitionslücke $x = -1$ ist der Grenzwert nicht unendlich) und eine horizontale Asymptote $y = 1$.