Tutorium Mathematik I, M

Blatt 11

15. Januar 2021

***Aufgabe 11.1.** Lösen Sie die Integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 20x + 41}}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$\int \sin(2x)\cosh(3x)\mathrm{d}x, \qquad \int \operatorname{arsinh}(2x)\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 11.2. Lösen Sie die Integrale

(a) $\int \frac{\big(\operatorname{arsinh}(x)\big)^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

(b) $\int x^2 e^{2x}\mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{1}{4x - x^2}\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{x^2}{x^2 + 4x - 5}\mathrm{d}x$

(e) $\int x \operatorname{artanh}(x)\mathrm{d}x$

(f) $\int \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 42x + 5}}\mathrm{d}x$

(g) $\int x^5 e^{x^2}\mathrm{d}x$

(h) $\int \ln(x)^2\mathrm{d}x$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 11.2. Die unten angegebenen Integrale sind nicht immer die *einzigen* möglichen Darstellungen.

(a) $$\int \frac{\big(\operatorname{arsinh}(x)\big)^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\big(\operatorname{arsinh}(x)\big)^6 + C.$$

(b) $$\int x^2 e^{2x}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + C.$$

(c) $$\begin{aligned}\int \frac{1}{4x-x^2}\mathrm{d}x &= \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{artanh}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C & \text{für } x \in (0,4), \\ \frac{1}{2}\operatorname{arcoth}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus[0,4] \end{cases} \\ &= \frac{1}{4}\big(\ln|x| - \ln|x-4|\big) + C.\end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2+4x-5}\mathrm{d}x &= x - 2\ln\left|x^2+4x-5\right| - \frac{13}{3}\begin{cases} \operatorname{artanh}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C & \text{für } x \in (-5,1), \\ \operatorname{arcoth}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus[-5,1] \end{cases} \\ &= x + \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{25}{6}\ln|x+5| + C.\end{aligned}$$

(e) $$\int x\operatorname{artanh}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{artanh}(x) + C.$$

(f) $$\int \frac{1}{\sqrt{49x^2+42x+5}}\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\operatorname{arcosh}\left(\frac{7x+3}{2}\right) + C.$$

(g) $$\int x^5 e^{x^2}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1\right) e^{x^2} + C.$$

(h) $$\int \ln(x)^2\mathrm{d}x = x\ln(x)^2 - 2x\ln(x) + 2x + C$$