Tutorium Mathematik I, M

Blatt 12

22. Januar 2021

***Aufgabe 12.1.** Untersuchen Sie, ob die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{2}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sin(x)+2\cos(x)+3}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

Aufgabe 12.2. Untersuchen Sie, ob die Integrale

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln(x^2)\,\mathrm{d}x,$

(c) $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x,$

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^3+x}\,\mathrm{d}x,$

(e) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x+4}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x,$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\operatorname{arsinh}(x)^2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x,$

(g) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \frac{\sin(x)}{x^2}-\frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x,$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{3}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

Hinweis für (g). Zeigen Sie zuerst $\int \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sin(x)}{x} + \int \frac{\cos(x)}{x}\mathrm{d}x$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 12.2.

(a) Dieses Integral existiert nicht, weil die Grenzwerte der Stammfunktion an den Polstellen $x = -3$ und $x = -2$ nicht existieren (für $x \to \pm\infty$ existieren sie hingegen).

(b) Dieses Integral hat den Wert -4 (trotz der Polstelle bei $x = 0$).

(c) Dieses Integral hat den Wert $\operatorname{arsinh}(11) - \operatorname{arsinh}(-9) \approx 5{,}987$. (Die Stammfunktion ist auf dem gesamten Intervall $[-10, 10]$ definiert, es müssen also keinerlei Grenzwerte betrachtet werden.)

(d) Dieses Integral hat den Wert $\ln(2) \approx 0{,}693$.

(e) Dieses Integral existiert nicht, weil der Grenzwert der Stammfunktion für $x \to \infty$ nicht existiert.

(f) Dieses Integral existiert nicht, weil die Grenzwerte der Stammfunktion an der Polstelle $x = 0$ nicht existieren (für $x \to \pm\infty$ existieren sie hingegen).

(g) Das Integral hat den Wert 0 (trotz der Polstelle bei $x = 0$).

(h) Das Integral hat den Wert 3π.