

Tutorium Mathematik I, M

Blatt 2

30. Oktober 2020

***Aufgabe 2.1.** Gegeben sind die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -6 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

(a) Ermitteln Sie alle Punkte, die Abstand 17 zu A und Abstand 13 zu B haben.

Wählen Sie nun einen solchen Punkt C und berechnen Sie

- (b) den Abstand von C zur Geraden g durch A und B ,
- (c) den Punkt auf g , der C am nächsten liegt,
- (d) die Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

***Aufgabe 2.2.** Betrachten Sie die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Schneiden g und h einander? Falls ja, geben Sie den Schnittpunkt und -winkel an. Falls sie einander nicht schneiden, geben Sie ihren minimalen Abstand an, sowie die Punkte auf den Geraden, welche diesen Abstand zueinander haben.

Aufgabe 2.3. Gegeben sind die Geraden

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: 4x + 3y = 30.$$

- (a) Berechnen Sie die Schnittpunkte und -winkel der Geraden und den Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Schnittpunkte sind.
- (b) Ermitteln Sie den Abstand von $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu f, g und h sowie jeweils die Punkte auf den Geraden, die P am nächsten liegen.

Aufgabe 2.4. Betrachten Sie die Geraden

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R},$$
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$
$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie für jedes Paar dieser Geraden, ob sie einander schneiden. Falls ja, geben Sie Schnittpunkt und -winkel an. Falls sie einander nicht schneiden, geben Sie ihren minimalen Abstand an, sowie die Punkte auf den Geraden, welche diesen Abstand zueinander haben.

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 2.3.

(a) Die Schnittpunkte und -winkel sind wie folgt.

- f und g schneiden einander in $S_{f,g} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit Winkel $\alpha_{f,g} \approx 1,249 \approx 71,57^\circ$.
- f und h schneiden einander in $S_{f,h} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit Winkel $\alpha_{f,h} \approx 1,4289 \approx 81,87^\circ$.
- g und h schneiden einander in $S_{g,h} = \begin{pmatrix} 21 \\ -18 \end{pmatrix}$ mit Winkel $\alpha_{g,h} \approx 0,4636 \approx 26,57^\circ$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist 210.

(b) P hat

- Abstand $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ zu f ,
- Abstand $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ zu g ,
- Abstand 5 zu h .

Die P am nächsten liegenden Punkte auf den Geraden sind

- $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf f ,
- $\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ auf g ,
- $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf h .

Lösung von Aufgabe 2.4. Die Geraden f und h schneiden einander in $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit

Winkel $\alpha \approx 0,661 \approx 37,87^\circ$.

Die Gerade g schneidet die anderen beiden Geraden nicht. Ihr minimaler Abstand sowohl zu f als auch zu h ist 7; die Punkte auf den Geraden, die diesen Abstand zueinander haben,

sind $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (auf g) und S (sowohl auf f als auch auf h).