Tutorium Mathematik I, M

Blatt 3

6. November 2020

***Aufgabe 3.1.** Gegeben sind der Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{R}$$

und die Ebenen

$$\epsilon_1 \colon x - 4y + 3z = -3 \quad \text{und} \quad \epsilon_2 \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung von ϵ_1 und eine Darstellung von ϵ_2 in Normalform an.

(b) Berechnen Sie die Abstände von P zu g und zu ϵ_2.

(c) Ermitteln Sie die Schnittgerade von ϵ_1 und ϵ_2.

(d) In welchem Punkt und in welchem Winkel schneiden g und ϵ_1 einander?

***Aufgabe 3.2.** Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, wobei

$$a_n = \frac{2n^2 - n + 5}{3n^2 + 2 - 6n^3} \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{2^{n+3} - (-3)^{2n-3}}{9^{n-2} - 7^{n+1}}.$$

Geben Sie, wo möglich, den Grenzwert an.

Aufgabe 3.3. Gegeben sind der Punkt $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; r \in \mathbb{R}$$

und die Ebenen

$$\epsilon_1 \colon x - 4y - 2z = -16 \quad \text{und} \quad \epsilon_2 \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung von ϵ_1 und eine Darstellung von ϵ_2 in Normalform an.

(b) Berechnen Sie die Abstände von P zu g und zu ϵ_2 sowie die Punkte auf g bzw. ϵ_2, die diesen Abstand zu P haben.

(c) Ermitteln Sie die Schnittgerade von ϵ_1 und ϵ_2.

(d) In welchem Punkt und in welchem Winkel schneiden g und ϵ_1 einander?

Aufgabe 3.4. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, wobei

$$a_n = \frac{4n^3 + 1 - 7n}{3n^3 + 2n^2 - n - 3}, \qquad b_n = \frac{3^{n+5} - 2^{3n-1}}{7^{n-2} + 5^{n+2}} \qquad \text{und} \qquad c_n = \frac{4^{n-1} + 6^{n+5}}{(-7)^{n+2} - 3^{n-6}}.$$

Geben Sie, wo möglich, den Grenzwert an.

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 3.3.

(a) Für beide Ebenen gibt es viele äquivalente Darstellungen. Eine Parameterdarstellung von ϵ_1 ist zum Beispiel

$$\epsilon_1 \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R}.$$

Jede andere Darstellung ist richtig, bei der

- der Aufhängepunkt die Gleichung $x - 4y - 2z = -16$ erfüllt und
- die Richtungsvektoren die Gleichung $x - 4y - 2z = 0$ erfüllen.

Eine Darstellung von ϵ_2 in Normalform ist $\epsilon_2 \colon 5x + y + 4z = 32$. Man kann diese Gleichung auch mit einer beliebigen Zahl $\neq 0$ multiplizieren und erhält eine weitere Darstellung in Normalform.

(b) P hat Abstand $\sqrt{10}$ zu g; der dazugehörige Punkt auf g ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

P hat Abstand $\sqrt{42}$ zu ϵ_2; der dazugehörige Punkt auf ϵ_2 ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) Die Schnittgerade ist

$$h \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Andere mögliche Darstellungen sind alle Darstellungen, bei denen der Richtungsvektor kollinear zum obigen Richtungsvektor ist und der Aufhängepunkt um ein Vielfaches des Richtungsvektors vom obigen Aufhängepunkt ausgehend verschoben.

(d) Schnittpunkt von g und ϵ_1 ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; Schnittwinkel ist $\alpha \approx 0{,}1109 \approx 6{,}35°$.

Lösung von Aufgabe 3.4. Die Konvergenzen sind wie folgt.

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$.
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. (Es gilt sogar strenger $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.)
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.
- $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. (Es gilt sogar strenger $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \infty$.)
- $(b_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. (Es gilt sogar strenger $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - c_n) = -\infty$.)
- $(c_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n - a_n) = -\frac{4}{3}$.