

Tutorium Mathematik I, M

Blatt 4

13. November 2020

***Aufgabe 4.1.** Untersuchen Sie die Folgen

$$a_n = \sqrt{3n^2 + 2n - 1} - \sqrt{3n^2 + n + 4} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2^n + n^2}{(n^2 + 3n)3^n}$$

auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

***Aufgabe 4.2.** Untersuchen Sie die Folgen

$$a_n = (-1)^n \left(\sqrt{3n^2 + 2n - 1} - \sqrt{3n^2 + n + 4} \right) \quad \text{und} \quad b_n = \frac{n^2 + 4n + 5}{n + 1} - \frac{n^2 + 4n + 1}{n + 2}$$

auf Monotonie und Beschränktheit.

***Aufgabe 4.3.** Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie Limes Inferior und Limes Superior der Folge

$$a_n = (n + 1) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) - (n + 2) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + (-1)^{n-1} (n + 3).$$

Aufgabe 4.4. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

$$a_n = \sqrt{5n^2 + 2n - 1} - \sqrt{5n^2 + 2n + 4}, \quad b_n = \frac{(n+1)2^{n+2} - n^2 4^n}{3^n - n},$$

$$c_n = \sqrt{2n^2 + 7n - 2} - \sqrt{2n^2 + 4n + 8}, \quad d_n = \frac{(n+1)2^{n+2} - n^2 4^n}{(2n^2 - 1)4^n - n}.$$

Aufgabe 4.5. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit.

$$a_n = (-1)^n \sqrt{5n^2 + 2n + 4} - \sqrt{5n^2 + 2n - 1}, \quad b_n = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)2^{n+2} - n^2 4^n}{(2n^2 - 1)4^n - n},$$

$$c_n = \frac{2n^2 + 3n - 8}{n+3} - \frac{2n^2 + 5n - 2}{n+2}, \quad d_n = \frac{(n+1)2^{n+2} + (-1)^n n^2 4^n}{(2n^2 - 1)4^n - n}.$$

Aufgabe 4.6. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie Limes Inferior und Limes Superior der Folgen

$$a_n = (n^2 - 2) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (n+3) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^n (n-7),$$

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)2^{n+2} - n^2 4^n}{(2n^2 - 1)4^n - n},$$

$$c_n = (-1)^n (n^2 + 1) + (-1)^{n+1} (n^2 + 3),$$

$$d_n = \frac{(n+1)2^{n+2} + (-1)^n n^2 4^n}{(2n^2 - 1)4^n - n}.$$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 4.4. Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert, die anderen Folgen konvergieren. Genauer gilt

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{3}{2\sqrt{2}}$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -\frac{1}{2}$.

Lösung von Aufgabe 4.5.

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht monoton und auch nicht beschränkt. Die Folge ist aber nach oben beschränkt.
- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht monoton, aber beschränkt.
- $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton und beschränkt.
- $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht monoton, aber beschränkt.

Lösung von Aufgabe 4.6.

- Die Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind $-\infty, -10, \infty$. Außerdem ist $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.
- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die gleiche Folge wie in Aufgabe 4.5 und hat die Häufungspunkte $\pm \frac{1}{2}$. Außerdem ist $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -\frac{1}{2}$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$.
- Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind ± 2 . Außerdem ist $\liminf_{n \rightarrow \infty} c_n = -2$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$.
- $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die gleiche Folge wie in Aufgabe 4.5 und hat die Häufungspunkte $\pm \frac{1}{2}$. Außerdem ist $\liminf_{n \rightarrow \infty} d_n = -\frac{1}{2}$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n = \frac{1}{2}$.