Tutorium Mathematik I, M

Blatt 6

27. November 2020

***Aufgabe 6.1.** Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der reellen Funktionen

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 - 2x - 3} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \sqrt{\sin(x)}$$

sowie die Bereiche, auf denen sie monoton steigend beziehungsweise monoton fallend sind.

Aufgabe 6.2. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der reellen Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \ln(x^2 - 4x), & f_2(x) &= \frac{4x^2 - 4x - 5}{x - 1}, \\ f_3(x) &= e^{-x^3 + 9x^2 - 27x + 27}, & f_4(x) &= \tan\left(\sqrt{4 - x^2}\right), \\ f_5(x) &= \arcsin(2x + 3), & f_6(x) &= \sqrt{2e^x - e^{2x} + 3}, \\ f_7(x) &= \ln(\cos(x)), & f_8(x) &= e^x + 2e^{\ln(x)}, \\ f_9(x) &= \frac{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}{x - 1}, & f_{10}(x) &= \arcsin(3 - 2x), \end{aligned}$$

sowie die Bereiche, auf denen sie monoton steigend beziehungsweise monoton fallend sind. Verwenden Sie dabei *keine* Differentialrechnung!

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 6.2.

- Größtmöglicher Definitionsbereich von f_1 ist $(-\infty,0)\cup(4,\infty)=\mathbb{R}\setminus[0,4]$. Auf $(-\infty,0)$ ist f_1 (streng) monoton fallend, auf $(4,\infty)$ (streng) monoton steigend.
- Größtmöglicher Definitionsbereich von f_2 ist $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Die Funktion ist auf $(-\infty,1)$ und auf $(1,\infty)$ (streng) monoton steigend, allerdings *nicht* auf dem gesamten Definitionsbereich (z.B. $f_2(0)=5$, was größer als $f_2(2)=3$ ist).
- Größtmöglicher Definitionsbereich von f_3 ist $\mathbb{R}$ und dort ist die Funktion (streng) monoton fallend.
- Größtmöglicher Definitionsbereich von f_4 ist $[-2,2]\setminus\left\{-\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}},\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}}\right\}$. Auf den Intervallen $\left[-2,-\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}}\right)$ und $\left(-\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}},0\right]$ (allerdings nicht auf der Vereinigung dieser beiden Intervalle) ist f_4 (streng) monoton steigend, auf $\left[0,\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}}\right)$ und auf $\left(\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}},2\right]$ (streng) monoton fallend.
- Größtmöglicher Definitionsbereich von f_5 ist $[-2,-1]$ und dort ist die Funktion (streng) monoton steigend.
- Größtmöglicher Definitionsbereich von f_6 ist $(-\infty,\ln(3)]$. Auf $(-\infty,0]$ ist f_6 (streng) monoton steigend, auf $[0,\ln(3)]$ (streng) monoton fallend.
- Größtmöglicher Definitionsbereich von f_7 ist $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi,\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$. Die Funktion ist auf jedem Intervall $\left(\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi,2k\pi\right)$ (streng) monoton steigend und auf jedem Intervall $\left(2k\pi,\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ (streng) monoton fallend.
- Größtmöglicher Definitionsbereich von f_8 ist $\mathbb{R}_{\geq 0}=(0,\infty)$. Auf diesem Bereich ist sie (streng) monoton steigend.
- Größtmöglicher Definitionsbereich von f_9 ist $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Sie ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich (streng) monoton steigend.
- Größtmöglicher Definitionsbereich von f_{10} ist $[1,2]$ und dort ist die Funktion (streng) monoton fallend.