Tutorium Mathematik I, M

Blatt 8

11. Dezember 2020

***Aufgabe 8.1.** Man bestimme die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{\ln(3x+1)} - \dfrac{1}{\ln(4x+1)} \right)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} (2^x - 3^x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{\ln(2x+1)} - \dfrac{1}{\ln(5x+1)} \right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\big(\ln(x)\big)^2$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x\ln(x)}$

Aufgabe 8.2. Man bestimme die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\ln(2x+1)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{\ln(x^2+1)} - \dfrac{1}{\ln(x+1)} \right)$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(\ln(\ln(x)))}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\sin(3x))^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln(x) \right)$

(f) $\lim\limits_{x\to\pi} \big((x-\pi)\cot(x)\big)$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\ln(1+4x) - \ln(2+3x)\big)$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \big(\ln(1+4x) - \ln(2+3x)\big)$

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \big(e^x \ln\big(1+x+x^2\big)\big)$

(j) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \right)$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 8.2.

(a) Der Grenzwert ist 0.

(b) $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{\ln(x^2+1)} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right) = \infty.$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(\ln(\ln(x)))} = \infty.$

(d) Der Grenzwert ist e^{-3}.

(e) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln(x) \right) = \infty.$

(f) Der Grenzwert ist 1.

(g) Der Grenzwert ist $\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln(4) - \ln(3)$. Hier wird l'Hospital nicht unbedingt benötigt; Zusammenfassen der beiden Logarithmen zu $\ln\left(\frac{1+4x}{2+3x}\right)$ und Kürzen von x im Bruch genügt.

(h) Der Grenzwert ist $-\ln(2)$, was direkt ohne l'Hospital zu sehen ist.

(i) Der Grenzwert ist 0.

(j) Der Grenzwert ist 0. Hier kann man l'Hospital allerdings nicht verwenden, da der Grenzwert von $\sin(1/x)$ nicht existiert! Den Grenzwert erhält man am einfachsten durch die Beobachtung, dass x gegen 0 läuft und der Sinus dabei nie über das Intervall $[-1, 1]$ hinaus geht.