Tutorium Mathematik I, M

Blatt 9

18. Dezember 2020

Verzichten Sie bei den Rechnungen soweit es geht auf zweite Ableitungen!

***Aufgabe 9.1.** Man bestimme für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich, alle lokalen und globalen Maxima und Minima, alle Sattelpunkte sowie das Monotonieverhalten.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$

(b) $g(x) = \sqrt{(1 - x^2)(3 + 4x + x^2)}$

Aufgabe 9.2. Man bestimme für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich, alle lokalen und globalen Maxima und Minima, alle Sattelpunkte sowie das Monotonieverhalten.

(a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 6}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 2x - 3}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$

(d) $f_4(x) = \ln(x)^2 - 32\sqrt{\ln(x)}$

(e) $f_5(x) = \sin(\pi\sqrt{x})$

(f) $f_6(x) = \cosh(x^2 + 2x - 15)$

(g) $f_7(x) = x^3\sqrt{4 - x^2}$

(h) $f_8(x) = \operatorname{arsinh}(x^3 - 9x^2 + 27x)$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 9.2.

(a) Der Definitionsbereich von f_1 ist $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$. An der Stelle $x = \frac{1}{2}$ hat f_1 ein lokales Maximum. Die Funktion ist monoton steigend auf den Intervallen $(-\infty, -2)$ und $(-2, 1/2]$ und monoton fallend auf den Intervallen $[1/2, 3)$ und $(3, \infty)$.

(b) Der Definitionsbereich von f_2 ist $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. Die Funktion besitzt keinerlei Extremstellen und ist monoton fallend auf $(-\infty, -1) \cup (-1, 3)$ und monoton steigend auf $(3, \infty)$.

(c) Der Definitionsbereich von f_3 ist $(1, \infty)$. Bei $x = e^e$ hat f_3 ein globales Maximum. Die Funktion ist monoton steigend auf $(1, e^e]$ und monoton fallend auf $[e^e, \infty)$.

(d) Der Definitionsbereich von f_4 ist $[1, \infty)$. Im Randpunkt $x = 1$ besitzt f_4 ein lokales Maximum; bei $x = e^4$ liegt ein globales Minimum. Die Funktion ist monoton fallend auf $[1, e^4]$ und monoton steigend auf $[e^4, \infty)$.

(e) Der Definitionsbereich von f_5 ist $[0, \infty)$. Am Randpunkt $x = 0$ liegt ein lokales Minimum, außerdem befinden sich globale Maxima an allen Punkten $x = (\frac{1}{2} + 2k)^2$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und globale Minima an allen Punkten $x = (\frac{3}{2} + 2k)^2$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion ist monoton steigend auf $[0, \frac{1}{4}]$ und auf allen Intervallen $[(\frac{3}{2} + 2k)^2, (\frac{5}{2} + 2k)^2]$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Auf allen Intervallen $[(\frac{1}{2} + 2k)^2, (\frac{3}{2} + 2k)^2]$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ ist f_5 monoton fallend.

(f) Der Definitionsbereich von f_6 ist ganz $\mathbb{R}$. An der Stelle $x = -1$ hat f_6 ein lokales Maximum und bei $x = -5$ und $x = 3$ liegen globale Minima. Die Funktion ist monoton fallend auf $(-\infty, -5]$ und auf $[-1, 3]$ und ist monoton steigend auf $[-5, -1]$ und auf $[3, \infty)$.

(g) Der Definitionsbereich von f_7 ist $[-2, 2]$. Am linken Randpunkt $x = -2$ liegt ein lokales Maximum und am rechten Randpunkt $x = 2$ ein lokales Minimum. Globale Extremstellen liegen bei $x = -\sqrt{3}$ (Minimum) und bei $x = \sqrt{3}$ (Maximum) vor. Außerdem befindet sich bei $x = 0$ ein Sattelpunkt. Die Funktion ist monoton fallend auf $[-2, -\sqrt{3}]$ und auf $[\sqrt{3}, 2]$ und ist monoton steigend auf $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

(h) Der Definitionsbereich von f_8 ist ganz $\mathbb{R}$. Die Funktion besitzt keine Extremstellen (aber einen Sattelpunkt bei $x = 3$) und ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend.