Formelsammlung Mathematik I, M

Wintersemester 2020/21; 501.011 (VO) und 501.012 (UE)

Komplexe Zahlen

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$z = a+bi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{z} = a-bi \\ |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}} \end{cases}$$

Polarkoordinaten:

$$z = r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

$$\bar{z} = r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)) = re^{-i\varphi}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)) = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$$

$$r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))\cdot s(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = rs(\cos(\varphi+\theta)+i\sin(\varphi+\theta))$$

Wurzeln: Die n-ten Wurzeln von $r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ sind

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), k=0,\dots,n-1$$

Vektorrechnung

$$\|\vec{x}\| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2+x_2^2} & \text{zweidimensional} \\ \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} & \text{dreidimensional} \end{cases}$$

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \begin{cases} x_1y_1+x_2y_2 & \text{zweidimensional} \\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 & \text{dreidimensional} \end{cases}$$

Winkel zwischen $\vec{x},\vec{y}$: $$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$$

Kreuzprodukt: $$\vec{x}\times\vec{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3-x_3y_2 \\ x_3y_1-x_1y_3 \\ x_1y_2-x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Geradengleichungen im $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{x} = P + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \qquad \text{Parameterform}$$

$$\langle \vec{n},\vec{x}\rangle = \langle \vec{n},P\rangle \text{ mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} \qquad \text{Normalform}$$

Ebenengleichungen im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = P + s\vec{q} + t\vec{r} \qquad \text{Parameterform}$$

$$\langle \vec{n},\vec{x}\rangle = \langle \vec{n},P\rangle \text{ mit } \vec{n} = \vec{q}\times\vec{r} \qquad \text{Normalform}$$

Abstand Q zu $\langle \vec{n},\vec{x}\rangle = \langle \vec{n},P\rangle$ (Gerade in $\mathbb{R}^2$/Ebene in $\mathbb{R}^3$):

$$\frac{|\langle \vec{n},Q\rangle - \langle \vec{n},P\rangle|}{\|\vec{n}\|}$$

Zu Q nächster Punkt auf $\langle \vec{n},\vec{x}\rangle = \langle \vec{n},P\rangle$:

$$Q - \frac{\langle \vec{n},Q\rangle - \langle \vec{n},P\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

Zu Q nächster Punkt auf $\vec{x} = P + t\vec{r}$ ist $P - \dfrac{\left\langle \overrightarrow{QP},\vec{r}\right\rangle}{\|\vec{r}\|^2}\vec{r}$.

Fläche des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$\|\vec{x}\times\vec{y}\|$$

Volumen des von $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ aufgespannten Parallelepipeds:

$$|\langle \vec{x},\vec{y}\times\vec{z}\rangle|$$

Folgen

Geometrische Folge:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q|<1 \\ 1 & \text{für } q=1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$$

Harmonische Folge: $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Majorantenkriterium: Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge und $|a_n-a|\le|b_n|$ für alle n ab $N\in\mathbb{N}$, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Einschließungskriterium: Konvergieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide gegen a und gilt für jedes $n\in\mathbb{N}$ ab einem Index N

$$a_n \le b_n \le c_n\,,$$

dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Häufungspunkt: $a\in\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$ ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Limes Superior und Limes Inferior: Der Limes Superior $\limsup_{n\to\infty} a_n$ (bzw. Limes Inferior $\liminf_{n\to\infty} a_n$) der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist der größte (bzw. kleinste) Häufungspunkt.

Lineare Rekursionen: Hat das Polynom

$$x^t - c_1x^{t-1} - c_2x^{t-2} - \dots - c_{t-1}x - c_t$$

lauter verschiedene Nullstellen $\beta_1,\dots,\beta_t$, dann hat die Lösung der linearen Rekursion

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ta_{n-t}$$

die Form $$a_n = \alpha_1\beta_1^n + \alpha_2\beta_2^n + \dots + \alpha_t\beta_t^n\,,$$

wobei die Konstanten $\alpha_1,\dots,\alpha_t$ durch die Werte der ersten t Folgenglieder bestimmt werden.

Reihen

konvergent	divergent
$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $\lvert q\rvert<1$	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $\lvert q\rvert\ge 1$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Notwendige Bedingung: Eine Reihe kann nur konvergieren, wenn die Folge ihrer Summanden eine Nullfolge ist.

Majorantenkriterium: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und gilt $|a_n|\le b_n$ für alle n ab einem Index N, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Minorantenkriterium: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent und gilt $0\le b_n\le a_n$ für alle n ab einem Index N, dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Leibniz-Kriterium: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Wurzelkriterium: Ist $\sqrt[n]{|a_n|}\le q$ für ein $q<1$ und alle n ab einem Index N, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Insbesondere konvergiert sie absolut, falls $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$. Ist $\sqrt[n]{|a_n|}\ge 1$ für unendlich viele n, so divergiert die Reihe.

Quotientenkriterium: Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\le q$ für ein $q<1$ und alle n ab einem Index N, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Insbesondere konvergiert sie absolut, falls $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$. Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\ge 1$ für alle n ab einem Index N, divergiert die Reihe.

Funktionen

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^0 = 1, \quad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(x^a) = a\ln(x)$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Ableitungsregeln

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x) \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Notwendige Bedingung für lokale Extrema: An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist die Ableitung 0.

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema: Sei $f'(x) = 0$. Falls $f''(x) < 0$, ist x lokale Maximalstelle. Falls $f''(x) > 0$, liegt eine lokale Minimalstelle vor.

Monotonie: Sei f auf $[a,b]$ stetig. Falls $f'(x) \geq 0$ auf (a,b), dann ist f auf $[a,b]$ monoton steigend. Falls $f'(x) \leq 0$, dann ist f monoton fallend. Gilt sogar $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$, dann ist f streng monoton steigend/fallend.

Krümmung: f ist (streng) konvex, falls f' (streng) monoton steigt. f ist (streng) konkav, falls f' (streng) monoton fällt. Ein *Wendepunkt* ist ein Punkt, an dem die Krümmung von konvex zu konkav (oder umgekehrt) wechselt.

Senkrechte Asymptote bei x_0 liegt vor, falls sowohl $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ als auch $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

Schiefe Asymptote $kx + d$ liegt vor, falls $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ und $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = d$.

Regel von l'Hospital

Konvergieren f und g für $x \to a$ beide gegen 0 oder beide gegen ∞, dann gilt $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls letzterer Grenzwert existiert oder $\pm\infty$ ist.

Taylorpolynome und Potenzreihen

Taylorpolynom: $P_n(x,x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Taylorreihe: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Konvergenzradius: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergiert für alle x mit $|x - x_0| < R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Für $|x - x_0| = R$ muss man die Konvergenz separat überprüfen.

Integrationsregeln

Partielle Integration:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Substitution: Mit $u = g(x)$ ist $\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du$.

Standardsubstitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ für Winkelfunktionen:

$$dx = \frac{2}{1+u^2}du, \quad \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Partialbruchzerlegung: Schreibe $\frac{P(x)}{Q(x)}$ als Summe von Partialbrüchen der Form

$$\frac{c}{(x-\lambda)^i} \text{ mit } i \in \mathbb{N} \text{ oder der Form } \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta},$$

wobei $x^2 + \alpha x + \beta$ keine reellen Nullstellen hat.

Wichtige Ableitungen und Integrale

$f(x)$ $\int g(x)dx$	$f'(x)$ $g(x)$	$f(x)$ $\int g(x)dx$	$f'(x)$ $g(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\cot(x)$	$-1-\cot(x)^2 = \frac{-1}{\sin(x)^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{-1}{x^2+1}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$1-\tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}$	$\coth(x)$	$1-\coth(x)^2 = \frac{-1}{\sinh(x)^2}$
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert > 1)$

Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für } a < c < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, dann

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ist f in a oder b nicht definiert, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to a^+}\int_y^b f(x)dx \qquad \text{beziehungsweise}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to b^-}\int_a^y f(x)dx.$$

Substitution bei bestimmten Integralen: Mit $u = g(x)$ ist

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Rotationskörper: $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ rotiert um die x-Achse

$$\text{Volumen: } V = \pi\int_a^b f(x)^2 dx$$

$$\text{Mantelfläche: } O = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$