Mathematik I, M, WS 2020/21
1. Übungsblatt
27.10.2020

Aufgabe 1.1. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen, welche die Ungleichung

$$\left|x^2 - 2x + 2\right| + |5x - 8| \leq 4$$

erfüllen.

Aufgabe 1.2. Ermitteln Sie für jede der folgenden Gleichungen alle reellen Zahlen x, die die Gleichung erfüllen.

(a) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

(b) $e^{2x} - 15e^x - 16 = 0$

(c) $(\ln x)^2 - 15 \ln x - 16 = 0$

Aufgabe 1.3. Finden Sie jeweils alle reellen Zahlen, welche die folgenden Gleichungen erfüllen.

(a) $\dfrac{x^2 - x + 6}{x - 6} = x + 6;$

(b) $\dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 5} = x - 2;$

(c) $\dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = x + 6.$

Aufgabe 1.4. Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2 + 2i, \quad z_2 = -3 + 3i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}\, i \quad \text{und} \quad z_4 = 3 + \sqrt{3}\, i.$$

Berechnen Sie die Brüche $\dfrac{z_1}{z_2}$ und $\dfrac{z_3}{z_4}$

(a) mit Hilfe von Polarkoordinaten;

(b) ohne Verwendung von Polarkoordinaten.

Hinweis: Es gilt

$$\frac{1}{r\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)} = \frac{1}{r}\big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big).$$

Aufgabe 1.5. Ermitteln Sie alle komplexen Zahlen z, welche die folgende Gleichung erfüllen.

$$\frac{2z^2 - (2 + \sqrt{3} + 4\sqrt{3}\, i)z + (6 + 4\sqrt{3})i}{z^2 - (\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\, i)z + 6i} = 1.$$

Aufgabe 1.6. Ermitteln Sie jene Punktmengen in $\mathbb{C}$, die durch die folgenden Gleichungen festgelegt werden und stellen Sie sie jeweils graphisch in der Gaußschen Zahlenebene dar.

(a) $(3 - i)z + \overline{(3 - i)z} = 12,$

(b) $|z + 1| = 2|z - 2|.$