

Mathematik I, M, WS 2020/21
10. Übungsblatt
26.1.2021

Aufgabe 10.1. Bestimmen Sie durch Partialbruchzerlegung das Integral

$$\int \frac{x^2 - x - 12}{x^3 - 2x - 4} dx.$$

Aufgabe 10.2. Lösen Sie die Integrale

$$\int \frac{3}{1 + 4e^{-x}} dx, \quad \int \frac{\operatorname{arsinh}(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{x}{(x^2 + 1) \ln(\sqrt{x^2 + 1})} dx$$

mit Hilfe geeigneter Substitutionen.

Aufgabe 10.3. Sei K ein gerader Kreiskegel (die Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche) mit Höhe $h > 0$ und Radius $r > 0$. Außerdem sei L der Rotationskörper der Funktion $f: [1, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, wobei $T > 1$.

Berechnen Sie anhand der Formel für Rotationskörper das Volumen und die Oberfläche von K sowie das Volumen von L . Zeigen Sie außerdem, dass die Mantelfläche von L für $T \rightarrow \infty$ unendlich groß wird. Wie verhält sich das Volumen von L für $T \rightarrow \infty$?

Hinweis: Das Integral für die Mantelfläche von L ist schwer zu lösen. Schätzen Sie stattdessen den Integranden durch eine Funktion nach unten ab, deren Integral leichter zu berechnen ist.

Aufgabe 10.4. Untersuchen Sie, ob die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} + e^x \ln(x) dx$$

existieren und geben Sie gegebenenfalls den Wert an.

Hinweis für das letzte Integral: Zeigen Sie zunächst $\int \frac{e^x - 1}{x} dx = (e^x - 1) \ln(x) - \int e^x \ln(x) dx$. Um die Konvergenz der Stammfunktion an den Rändern zu untersuchen, werden Sie l'Hospital benötigen.

Aufgabe 10.5. Untersuchen Sie, ob die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

existieren und geben Sie gegebenenfalls den Wert an.

Aufgabe 10.6. Ermitteln Sie durch Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{46 - 18x}{x^3 - 12x^2 + 41x - 42}.$$

Untersuchen Sie danach, ob die Integrale

$$\int_9^\infty f(x) dx, \quad \int_7^9 f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_5^9 f(x) dx$$

existieren und geben Sie gegebenenfalls den Wert an.