Mathematik I, M, WS 2020/21
3. Übungsblatt
10.11.2020

Aufgabe 3.1. Gegeben seien der Punkt $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$, die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{R}$$

und die Ebene

$$\epsilon\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Abstand von P zu g und von P zu ϵ. Berechnen Sie außerdem die Punkte auf g bzw. ϵ, die P am nächsten liegen.

Aufgabe 3.2. Die Ebene

$$\epsilon\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}$$

ist in Parameterform gegeben. Bestimmen Sie die Ebenengleichung in Normalform. Bestimmen Sie außerdem den Schnittpunkt von ϵ mit der Geraden

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{R}$$

sowie den Winkel, in welchem ϵ und g einander schneiden.

Aufgabe 3.3. Gegeben seien die Ebenen

$$\epsilon_1\colon 2x - 2y + z = 8 \quad \text{und} \quad \epsilon_2\colon 4x - y - 2z = 3.$$

Bestimmen Sie die Parameterform der Schnittgeraden und den Schnittwinkel der beiden Ebenen.

Aufgabe 3.4. Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ und Spitze S sind die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

bekannt. Ferner ist bekannt, dass die Grundfläche in der Ebene

$$\epsilon\colon 4x + y + 8z = 43$$

liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte der Pyramide.
Hinweis: Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche heißt *gerade*, falls die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt. Berechnen Sie zuerst diesen Mittelpunkt M und versuchen Sie danach, von M aus die anderen Eckpunkte der Grundfläche zu finden.

Aufgabe 3.5. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

$$a_n = \frac{n^2+2}{3n^2-4}\,, \qquad b_n = \frac{n^4+2n-3}{5n^3+8n^2}\,, \qquad c_n = \frac{4^{n+1}-(-3)^{n+1}}{3^{n+2}+2^{2n+3}}\,, \qquad d_n = \frac{6^{n-1}+5^{n+42}}{4^{n+2}-7^{n-1}}\,.$$

Aufgabe 3.6. Gegeben seien drei reelle Zahlen $a \in (0,1)$, $b \in \mathbb{R}$ und $c > 1$.

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^n = 0$.

Hinweis: Versuchen Sie, das Majorantenkriterium anzuwenden.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{c^n} = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie Teil (a).