Mathematik I, M, WS 2020/21
4. Übungsblatt
17.11.2020

Aufgabe 4.1. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(a) $a_n = \sqrt{7n+1} - \sqrt{7n-5}$;

(b) $b_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{4n-1}$;

(c) $c_n = \dfrac{(n^5-2n)5^n + n^2 6^n}{7^{n+2}}$.

Hinweis für (c): Verwenden Sie Aufgabe 3.6.

Aufgabe 4.2. Welche dieser Folgen sind monoton? Welche sind beschränkt? Welche sind nur nach oben oder unten beschränkt?

(a) $a_n = (-1)^n \dfrac{3n-1}{n+2}$;

(b) $b_n = \dfrac{4n^2+10n-2}{n+2} - \dfrac{2n^2+3n+4}{n+4}$.

Aufgabe 4.3. Zeigen Sie per Induktion, dass die durch

$$a_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ monoton steigend und (z.B. durch den Wert 2) nach oben beschränkt ist. Folgern Sie daraus, dass $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert und berechnen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für konvergente Folgen den Grenzwert.

Aufgabe 4.4. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie Limes Superior und Limes Inferior der nachstehenden Folgen.

(a) $a_n = n + (-1)^{n+1}(n-7)$;

(b) $b_n = (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{3n+1}\right)$;

(c) $c_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Aufgabe 4.5. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist rekursiv durch

$$a_0 = 2, a_1 = -12, a_2 = 42 \quad \text{und} \quad a_n = -a_{n-1} + 17a_{n-2} - 15a_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3$$

definiert. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung für a_n.

Aufgabe 4.6. Zeigen Sie mit Hilfe von Partialsummen, dass

(a) die Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} \cdots$$

divergiert;

(b) bei gegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer Zahl $N \in \mathbb{N}$ die Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

genau dann konvergiert, wenn

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

konvergiert.

Bemerkung: Aus (b) folgt, dass die Bedingungen von Majoranten-, Minoranten- und Lebniz-Kriterium nicht unbedingt schon für $n = 1$ gelten müssen, um die Konvergenz/Divergenz durch diese Kriterien zeigen zu können:

- Für die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genügt es, eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zu finden, so dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq N$ (Majorantenkriterium);
- Für die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genügt es, eine divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zu finden, so dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $0 \leq b_n \leq a_n$ für alle $n \geq N$ (Minorantenkriterium);
- Für die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ genügt es, wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und ab einem Index N monoton ist (Leibniz-Kriterium).