Mathematik I, M, WS 2020/21
5. Übungsblatt
24.11.2020

Aufgabe 5.1. Zeigen Sie mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums, dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-1}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-8n+17}}$$

konvergieren. Zeigen Sie außerdem, dass die erste der beiden Reihen *nicht* absolut konvergiert.

Aufgabe 5.2. Gegeben sind zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. Folgern Sie daraus, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-8n+17}}$$

aus Aufgabe 5.1 *nicht* absolut konvergiert.
Hinweis für den ersten Teil: Zeigen Sie zum Beispiel, dass für hinreichend große Indizes $\frac{b_n}{2} < a_n < 2b_n$ gilt und verwenden Sie die Bemerkung aus Aufgabe 4.6 für Majoranten-/Minorantenkriterium.

Aufgabe 5.3. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+5}{8n^2+13n+21} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n+2}{3n^2+4}$$

Aufgabe 5.4. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!\cdot n}{3^n((n-1)!)^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!\cdot n}{5^n((n+1)!)^2}$$

Aufgabe 5.5. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+7\sqrt{n}}{1+8\sqrt{n}}\right)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{20n^2+11\cdot(-1)^n n}{20n^2+24}\right)^n$$

Aufgabe 5.6. Bestimmen Sie die Werte der beiden konvergenten Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot 3^n - 3\cdot 2^n}{5^n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2 - 2^{2n+1}}{4^{n-1} n^2}.$$