

Mathematik I, M, WS 2020/21
6. Übungsblatt
1.12.2020

Bei den Aufgaben auf diesem Blatt dürfen Sie keine Differentialrechnung verwenden!

Aufgabe 6.1. Welche der folgenden Funktionen sind symmetrisch (gerade), welche sind schief-symmetrisch (ungerade)? (Nachweis!)

(a) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x)$ (b) $g(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3 + 4e^{-x^2}}$ (c) $h(x) = \frac{3(\sinh(x))^2 - 1}{4 \cosh(x) + 1}$

Aufgabe 6.2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 + 8x - 7}{x + 3}.$$

- (a) Führen Sie eine Polynomdivision für $f(x)$ durch.
- (b) Was ist der maximale Definitionsbereich von f ?
- (c) Ermitteln Sie die größtmöglichen Bereiche, auf denen f monoton ist.

Aufgabe 6.3. Bestimmen Sie mit Hilfe der Exponentialfunktion die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^n$$

und zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 8^{-n} \left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe 6.4. Berechnen Sie – nur mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen – die Identitäten

- (a) $\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$,
- (b) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$,
- (c) $\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = 2(\cos(x))^2 - 1$,
- (d) $1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{(\cos(x))^2}$.

Aufgabe 6.5. Zeigen Sie anhand der Definitionen der hyperbolischen Funktionen die Formeln

- (a) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$,
- (b) $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$.

Aufgabe 6.6. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und geben Sie gegebenenfalls ihren Wert an.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\sinh(x)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\cosh(x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x + 1}$