

**Mathematik I, M, WS 2020/21**  
**7. Übungsblatt**  
**15.12.2020**

**Bei den Aufgaben 7.1–7.3 dürfen Sie keine Differentialrechnung verwenden!**

**Aufgabe 7.1.** Für welche Werte  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  ist die folgende Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig?

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} + 4 & \text{für } x \leq 0, \\ b \cdot \frac{x^2 - 5x + c}{x - 3} & \text{für } 0 < x < 3, \\ x^2 - 2x + \frac{d}{x^2} & \text{für } x \geq 3. \end{cases}$$

**Aufgabe 7.2.** Sei

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 + x^2 - 5x + 3}.$$

Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge  $D$  für  $f$ . An welchen Punkten in  $\mathbb{R} \setminus D$  ist  $f$  stetig fortsetzbar? Geben Sie für diese Punkte den dazugehörigen Funktionswert der stetigen Fortsetzung an.

**Aufgabe 7.3.** Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{4 - \sqrt{x}}}$ .

- (a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich  $D$ , für den  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $f$  streng monoton steigend und somit insbesondere injektiv ist.
- (c) Geben Sie einen Wertebereich  $W$  an, für den  $f: D \rightarrow W$  surjektiv ist. (Nachweis!)  
*Hinweis:* Mit dem Zwischenwertsatz von Bolzano zeigt sich die Surjektivität ganz einfach.
- (d) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion  $f^{-1}: W \rightarrow D$ .

**Aufgabe 7.4.** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(3x))^{\frac{1}{x^2}}$

**Aufgabe 7.5.** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 4^+} (\ln(x - 4) - \ln(\sqrt{x} - 2))$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^3}{e^{3x}}$

**Aufgabe 7.6.** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( (\sin(x))^2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 1 + 2 \sin(x)}{x^3 - 1}$