

Mathematik I, M, WS 2020/21
9. Übungsblatt
19.1.2021

Aufgabe 9.1. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(2x) - x \sinh(2x) - 1}{e^x - 1 + \ln(1 - x)},$$

indem Sie in Zähler und Nenner jeweils die ersten Summanden der Taylorreihen bestimmen.

Aufgabe 9.2. Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche (die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe konvergiert) für die Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (x-2)^n}{5^n (2n+1)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (3x+1)^n}{15^n (n^2 + n - 1)}.$$

Aufgabe 9.3. Lösen Sie die Integrale

$$\int \arctan(x) dx \quad \text{und} \quad \int \cos(x) e^{2x} dx$$

durch partielle Integration.

Aufgabe 9.4. Lösen Sie die Integrale

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 25} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{25x^2 + 30x + 8}} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 12x + 8}} dx,$$

indem Sie die quadratischen Polynome durch geeignete Substitutionen auf die Form $u^2 + 1$ oder $u^2 - 1$ bringen.

Aufgabe 9.5. Lösen Sie die Integrale

$$\int \frac{-\sinh(x)}{2 \cosh(x) - 1} dx, \quad \int (x^3 + 4x) \sin(x) dx \quad \text{und} \quad \int \frac{9x - 3}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}} dx.$$

Aufgabe 9.6. Bei der Substitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ergeben sich die Identitäten $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ und $dx = \frac{2}{1+u^2} du$. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Substitution die Integrale

$$\int \frac{1}{1 - \cos(x)} dx, \quad \int \frac{1}{1 - \sin(x)} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{2 \sin(x) + 2 \cos(x) + 3} dx.$$

und geben Sie jeweils den Definitionsbereich der Stammfunktionen an.