

Tutorium Mathematik II, M

Blatt 1

5. März 2021

***Aufgabe 1.1.** Ermitteln Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & -6 \\ -2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

***Aufgabe 1.2.** Bestimmen Sie alle Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 6x_4 &= 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 6x_4 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3. Ermitteln Sie jeweils den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & -9 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.4. Bestimmen Sie alle Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ & 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 18 \\ & 6x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ & 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -2 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ & 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -9 \\ & -6x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ & -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad & 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ & -4x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_5 = -1 \\ & -2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad & 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ & -4x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_5 = 0 \\ & -2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 0 \end{aligned}$$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 1.3. Die Matrix A hat Rang 3 und die Matrix B hat Rang 4.

Lösung von Aufgabe 1.4. Bemerkung: Bei Lösungen mit mindestens einem frei wählbaren Parameter gibt es grundsätzlich mehrere Arten, die Lösung darzustellen.

- (a) Die (einzige) Lösung ist $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 2$.
- (b) Die (einzige) Lösung ist $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1$.
- (c) Die allgemeine Lösung lässt sich zum Beispiel als $x_1 = 3, x_2 = 3 - 2t, x_3 = 4$ und $x_4 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$ schreiben.
- (d) Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung.
- (e) Die allgemeine Lösung lässt sich zum Beispiel als $x_1 = -\frac{1}{2}r - 2s + \frac{3}{2}t, x_2 = -\frac{5}{8}r - s + \frac{7}{8}t, x_3 = r, x_4 = s$ und $x_5 = t$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$ schreiben.