Tutorium Mathematik II, M

Blatt 3

19. März 2021

***Aufgabe 3.1.** Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zu den Untervektorräumen $U = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \rangle$ und $V = \langle \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f} \rangle$ von $\mathbb{R}^4$ jeweils die Dimension und eine Basis. Geben Sie danach für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ (für U) bzw. $\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ (für V) die Koordinatenvektoren bezüglich der berechneten Basen an.

***Aufgabe 3.2.** Finden Sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.3. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zu den Untervektorräumen $U = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \rangle$, $V = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e} \rangle$ und $W = \langle \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f} \rangle$ die Dimension und eine Basis B_U, B_V bzw. B_W. Geben Sie danach die Koordinatenvektoren

- von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ bezüglich B_U,
- von $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ bezüglich B_V und
- von $\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ bezüglich B_W an.

Aufgabe 3.4. Finden Sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -6 \\ 6 & 1 & -6 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 3.3. Die Basen der Vektorräume sind *nicht* eindeutig. Die unten angegebenen Basen sind jeweils nur *eine* Möglichkeit, die Basis auszuwählen.

- U hat Dimension 3 und eine mögliche Basis ist $B_U = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Die Koordinatenvektoren von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bezüglich B_U sind offensichtlich $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ und $(0,0,1)^T$. Der vierte Vektor $\vec{d}$ hat Koordinatenvektor $(3,-2,-4)^T$ bezüglich B_U.

- V hat Dimension 4. Mögliche Basen sind die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ oder $B_V = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e})$. Die Koordinatenvektoren von $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ bezüglich B_V sind einfach $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0)^T$, $(0,0,1,0)^T$ und $(0,0,0,1)^T$. (Bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ sind die Koordinatenvektoren genau die in der Aufgabenstellung genannten Darstellungen.)

- W hat Dimension 3 und eine mögliche Basis ist $B_W = (\vec{c}, \vec{d}, \vec{e})$. Die Koordinatenvektoren von $\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ bezüglich B_W sind offensichtlich $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ und $(0,0,1)^T$. Der vierte Vektor $\vec{f}$ hat Koordinatenvektor $(2,1,-7)^T$ bezüglich B_W.

Lösung von Aufgabe 3.4. Achtung: Der Nullvektor ist nie ein Eigenvektor! Deshalb dürfen in den Darstellungen der Eigenvektoren nie *alle* Parameter *gleichzeitig* Null sein.

Bei Eigenwerten, deren Eigenvektoren eine Darstellung mit nur einem Parameter besitzen, ist diese Darstellung eindeutig bis auf Skalierung des Vektors, der mit dem Parameter multipliziert wird. Kommen in der Darstellung der Eigenvektoren mehrere Parameter vor, dann ist diese Darstellung grundsätzlich nicht eindeutig (analog zur Angabe einer Basis bei einem Untervektorraum).

- Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 1$ mit allgemeinem Eigenvektor
$$r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
$\lambda_2 = -1$ mit allgemeinem Eigenvektor
$$s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
und $\lambda_3 = 2$ mit allgemeinem Eigenvektor
$$t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Die Eigenwerte von B sind $\lambda_1 = 3$ mit allgemeinem Eigenvektor
$$s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
und $\lambda_2 = 2$ mit allgemeinem Eigenvektor
$$t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Die Eigenwerte von C sind $\lambda_1 = 1$ mit allgemeinem Eigenvektor

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

  und $\lambda_2 = 3$ mit allgemeinem Eigenvektor

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

- Der einzige Eigenwert von D ist $\lambda_1 = 2$ mit allgemeinem Eigenvektor

$$s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$