Tutorium Mathematik II, M

Blatt 4

26. März 2021

***Aufgabe 4.1.** Welche Kegelschnitte werden durch die Gleichungen

(a) $$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 10x_2 = -17,$$

(b) $$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 10x_2 = -11,$$

(c) $$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 10x_2 = -9$$

definiert? Für die Lösungen sollten Sie angeben: Typ (Ellipse, Hyperbel etc.) des Kegelschnittes, seine Lage und Ausrichtung (Verschiebungsvektor und Drehwinkel) sowie gegebenenfalls seine Halbachsen, Scheitelpunkte, Steigung etc.

Aufgabe 4.2. Welche Kegelschnitte werden durch die folgenden Gleichungen definiert? Für die Lösungen sollten Sie angeben: Typ (Ellipse, Hyperbel etc.) des Kegelschnittes, seine Lage und Ausrichtung (Verschiebungsvektor und Drehwinkel) sowie gegebenenfalls seine Halbachsen, Scheitelpunkte, Steigung etc.

(a) $$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + x_2 = -3,$$

(b) $$2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_1 - 4x_2 = -2,$$

(c) $$3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 = 0,$$

(d) $$-2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 15x_1 + 5x_2 = 4,$$

(e) $$x_1x_2 + 2x_1 - x_2 = 3,$$

(f) $$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 3x_2 = 0,$$

(g) $$3x_1^2 - 6x_1x_2 + 11x_2^2 + 6x_1 + 10x_2 = -5,$$

(h) $$-x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_1 - 4x_2 = 11.$$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Allgemeine Vorgehensweise bei einem Kegelschnitt

$$\vec{x}^T A\vec{x} + \vec{p}^T\vec{x} + f = 0 \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ und } \vec{p} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}.$$

Fall $\det(A) \neq 0$:

- Berechne $\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p}$ und $C = \frac{1}{2}\vec{p}^T\vec{q} + f$.
- Bestimme die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A sowie normierte Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ zu λ_1 und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ zu λ_2, wobei $\beta_1 = -\alpha_2 \geq 0$ gelten sollte.

  Dann ist
  $$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$
  eine Drehmatrix um den Winkel $\varphi = \arccos(\alpha_1)$ und die Substitution $\vec{x} = S\vec{z} + \vec{q}$ liefert die Gleichung
  $$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + C = 0.$$
- Für die Lösungsmenge für $\vec{z}$ gilt

Koeffizienten	Lösungsmenge
$C = 0$ und λ_1, λ_2 gleiches Vorzeichen	$\{0\}$
$C = 0$ und λ_1, λ_2 verschiedene Vorz.	zwei Geraden durch $(0,0)$ mit Steigung $\pm\sqrt{\left\lvert\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\rvert}$
Alle gleiches Vorz.	$\emptyset$
λ_1, λ_2 gleiches Vorz., C anderes Vor.	Ellipse mit Achsenlängen $l_1 = \sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_1}\right\rvert}$, $l_2 = \sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_2}\right\rvert}$
λ_1, λ_2 versch. Vorz., C, λ_1 gleiches Vorz.	Hyperbel, 2. Hauptlage, Scheitelp. bei $z_2 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_2}\right\rvert}$
λ_1, λ_2 versch. Vorz., C, λ_2 gleiches Vorz.	Hyperbel, 1. Hauptlage, Scheitelp. bei $z_1 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_1}\right\rvert}$
beide vorigen Fälle	Asymptoten $z_2 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\rvert} \cdot z_1$

Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist die Lösungsmenge für $\vec{z}$ um φ gedreht und danach um $\vec{q}$ verschoben.

Fall $\det(A) = 0$:
Falls $A = 0$, ist die Lösungsmenge eine Gerade, deren Lage von d, e, f abhängt. Ansonsten:

- Ein Eigenwert von A ist $\lambda_2 = 0$, berechne den anderen Eigenwert λ_1 und Eigenvektoren $\vec{v}_1$ zu λ_1 und $\vec{v}_2$ zu λ_2. Wähle dabei $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ wie im Fall $\det(A) \neq 0$.
- Berechne
$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = S^T \vec{p}.$$
- Bestimme den Drehwinkel φ wie im Fall $\det(A) \neq 0$.
- Die Substitution $\vec{x} = S\vec{y}$. liefert die Gleichung
$$\lambda_1 y_1^2 + g y_1 + h y_2 + f = 0.$$
- Falls $h = 0$, dann gilt für die Lösungsmenge für $\vec{y}$

Koeffizienten	Lösungsmenge
$g^2 - 4f\lambda_1 < 0$	$\emptyset$
$g^2 - 4f\lambda_1 = 0$	Gerade $y_1 = -\frac{g}{2\lambda_1}$
$g^2 - 4f\lambda_1 > 0$	zwei Geraden $y_1 = -\frac{g \pm \sqrt{g^2 - 4f\lambda_1}}{2\lambda_1}$

- Falls $h \neq 0$, dann ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ eine Parabel mit Scheitelpunkt $\left(-\frac{g}{2\lambda_1}, \frac{g^2}{4\lambda_1 h} - \frac{f}{h}\right)^T$, geöffnet nach oben, falls $\frac{h}{\lambda_1} < 0$, ansonsten nach unten geöffnet.

Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ um φ gedreht.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 4.2. Bei den meisten Kegelschnitten hat man die Wahl, in welcher Reihenfolge man die jeweiligen Eigenwerte betrachtet. Dadurch ergeben sich dann auch leicht unterschiedliche Darstellungen des gleichen Kegelschnittes. Zum Beispiel ist eine Ellipse mit Halbachsen 1 und 2 (in dieser Reihenfolge) das Gleiche wie eine Ellipse mit Halbachsen 2 und 1, die um $\frac{\pi}{2}$ gedreht wurde. Unten wird jeweils nur eine mögliche Darstellung der Lösungsmenge angegeben.

Alle Drehwinkel sind im Bogenmaß angegeben.

(a) Dieser Kegelschnitt ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{11}{8\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

die um den Winkel $\frac{3\pi}{4}$ gedreht wurde.

(b) Dieser Kegelschnitt besteht nur aus dem Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Dieser Kegelschnitt besteht aus zwei Geraden mit Steigung ± 1 durch den Koordinatenursprung, die anschließend um den Winkel $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 0{,}4636$ wurden.

(d) Dieser Kegelschnitt ist eine Hyperbel in zweiter Hauptlage mit Scheitelpunkten bei $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{\frac{42}{5}} \end{pmatrix}$ und Asymptoten $z_2 = \pm z_1$, die anschließend um den Winkel $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 1{,}249$ gedreht und danach um $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ verschoben wurde.

(e) Dieser Kegelschnitt ist eine Hyperbel in erster Hauptlage mit Scheitelpunkten bei $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und Asymptoten $z_2 = \pm z_1$, die anschließend um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gedreht und danach um $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verschoben wurde.

(f) Dieser Kegelschnitt besteht aus zwei senkrechten Geraden mit den x-Koordinaten 0 und $\frac{3}{\sqrt{2}}$, die anschließend um den Winkel $\frac{3\pi}{4}$ gedreht wurden.
In der Schreibweise $y = kx + d$ ausgedrückt sind dies die beiden Geraden $y = x$ und $y = x + 3$.

(g) Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{3}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$, um den Winkel $\varphi = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0{,}32175$ gedreht und danach um $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ verschoben.

(h) Dieser Kegelschnitt besteht nur aus dem Punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.