Tutorium Mathematik II, M

Blatt 5

16. April 2021

***Aufgabe 5.1.** Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen

$$y''' - 2y'' + y' = \cosh(x) - x,$$
$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad x > 0.$$

***Aufgabe 5.2.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -9 \\ -2 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Aufgabe 5.3. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $y'' - 6y' - 7y = 48\cosh(x) - 260e^{2x}\cos(x)$,

(b) $y''' + 6y'' + 18y' = 108x$,

(c) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\tan(x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,

(d) $y'' - 4y' + 13y = 9e^{2x} + 16\sin(-3x) + 8\cos(3x)$.

Aufgabe 5.4. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungn der homogenen Systeme

$$\text{(a)} \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -6 & -21 & -7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 15 & 6 \end{pmatrix} \vec{x},$$
$$\text{(b)} \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x},$$
$$\text{(c)} \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 4 & -19 & -24 \\ -4 & 17 & 22 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 5.3. Die partikuläre Lösung kann auf verschiedene Arten dargestellt werden, die sich aber allesamt nur und eine Lösung der homogenen Differentialgleichung unterscheiden.

(a) Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{7x} - 2e^{x} - 3xe^{-x} + 16e^{2x}\cos(x) + 2e^{2x}\sin(x).$$

Die partikuläre Lösung kann man dabei wahlweise über einen speziellen Ansatz oder durch Variation der Konstanten berechnen.

(b) Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1 + e^{3x}(c_2\sin(3x) + c_3\cos(3x)) + 3x^2 - 2x.$$

In diesem Fall kann die partikuläre Lösung ausschließlich über einen speziellen Ansatz berechnet werden, da wir Variation der Konstanten nur für Differentialgleichungen der Ordnung 2 kennen.

(c) Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = e^{2x}(c_1\sin(x) + c_2\cos(x)) - 2\operatorname{artanh}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)e^{2x}\cos(x).$$

In diesem Fall muss Variation der Konstanten verwendet werden, weil die Störfunktion nicht von einer Form ist, für die ein spezieller Ansatz verwendet werden kann.

(d) Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = e^{2x}(c_1\sin(3x) + c_2\cos(3x)) + e^{2x} - \sin(3x) - \cos(3x).$$

Bei einem speziellen Ansatz sollte man beachten, dass $\sin(-3x) = -\sin(3x)$ und $\cos(-3x) = \cos(3x)$ gilt. Dadurch wird der Ansatz

$$y_P(x) = Ae^{2x} + B\sin(3x) + C\cos(3x)$$

kürzer, als wenn man bei Sinus und Cosinus zwischen den Argumenten $3x$ und $-3x$ unterscheidet.

Lösung von Aufgabe 5.4. Die Darstellungen der Lösungen sind nicht eindeutig, weil man bei den Eigenvektoren zumeist mehrere Wahlmöglichkeiten hat.

(a) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ (doppelt) und $\lambda_2 = 2$. Zu λ_1 finden wir auch zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = c_1e^{t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + c_2e^{t}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} + c_3e^{2t}\begin{pmatrix}-7\\1\\5\end{pmatrix}.$$

(b) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = 6$. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = c_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2e^{-4t}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} + c_3e^{6t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(c) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$ (doppelt). Zu λ_2 existieren jedoch keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = (c_1 + c_2t)e^{3t}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + c_2e^{3t}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}.$$