Tutorium Mathematik II, M

Blatt 8

7. Mai 2021

***Aufgabe 8.1.** Durch die Gleichung

$$f(x,y) = x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2 = 0$$

wird eine implizite Kurve definiert. Ermitteln Sie alle singulären Punkte und alle Punkte, an denen vertikale bzw. horizontale Tangenten vorliegen. Geben Sie für alle anderen Punkte die Geradengleichung der Tangente an.

Aufgabe 8.2. Ermitteln Sie für die folgenden implizit gegebenen Kurven alle singulären Punkte und alle Punkte, an denen vertikale bzw. horizontale Tangenten vorliegen. Geben Sie für alle anderen Punkte die Geradengleichung der Tangente an. Zeichnen Sie mit einem Plotter die Kurven und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse.

(a) $f_1(x,y) = \frac{y}{x} - \ln(x) - 1 = 0, \qquad x > 0$

(b) $f_2(x,y) = y^2 - x^3 + 3x - 2 = 0$

(c) $f_3(x,y) = xy^2 - x^3y = 0$

(d) $f_4(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0$

(e) $f_5(x,y) = 1 + 3x - x^3 - 2y + y^2 = 0$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

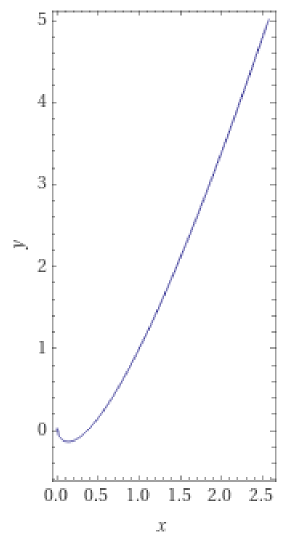
Lösung von Aufgabe 8.2. (a) Die partielle Ableitung von f_1 nach x ist genau dann Null, wenn $y = -x$. Die partielle Ableitung nach y ist hingegen nie Null. Auf der Kurve liegen

- keine singulären Punkte;
- der Punkt $\left(\frac{1}{e^2}, -\frac{1}{e^2}\right)^T$ mit horizontaler Tangente;
- keine Punkte mit vertikalen Tangenten.

Die Geradengleichung für die Tangenten an allen anderen Punkten $(x_0, y_0)^T$ ist

$$y(x) = y_0 + \left(\frac{y_0}{x_0} + 1\right)(x - x_0) = \left(\frac{y_0}{x_0} + 1\right)x - x_0.$$

Die Gleichung $f_1(x, y) = 0$ kann man leicht nach $y = f(x) := x(\ln(x) + 1)$ auflösen, die Kurve entspricht also dem Funktionsgraphen von $f(x)$.

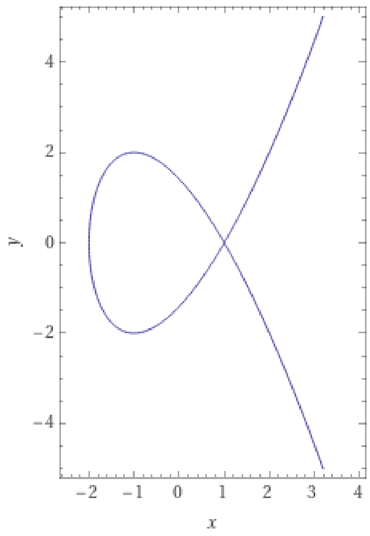


(b) Die partielle Ableitung von f_2 nach x ist genau dann Null, wenn $x = \pm 1$. Die partielle Ableitung nach y ist genau für $y = 0$ Null. Auf der Kurve liegen

- der singuläre Punkt $(1, 0)^T$;
- die Punkte $(-1, -2)^T$ und $(-1, 2)^T$ mit horizontalen Tangenten;
- der Punkt $(-2, 0)^T$ mit vertikaler Tangente.

Die Geradengleichung für die Tangenten an allen anderen Punkten $(x_0, y_0)^T$ ist

$$y(x) = y_0 + \frac{3x_0^2 - 3}{2y_0}(x - x_0).$$



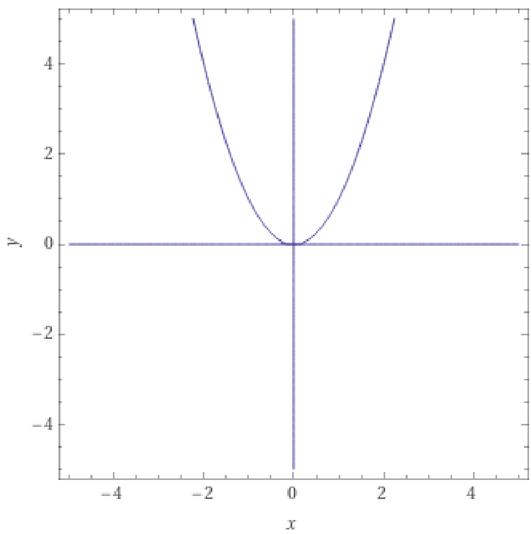
(c) Die partielle Ableitung von f_3 nach x ist genau dann Null, wenn $y = 0$ oder $y = 3x^2$. Die partielle Ableitung nach y ist genau für $x = 0$ sowie für $y = \frac{1}{2}x^2$ Null. Auf der Kurve liegen

- der singuläre Punkt $(0, 0)^T$;
- die Punkte $(x, 0)^T$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit horizontalen Tangenten;
- die Punkte $(0, y)^T$ für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit vertikalen Tangenten.

Die Geradengleichung für die Tangenten an allen anderen Punkten $(x_0, y_0)^T$ ist

$$y(x) = y_0 - \frac{y_0^2 - 3x_0^2 y_0}{2x_0 y_0 - x_0^3}(x - x_0).$$

Die Funktion kann man leicht als $f_3(x, y) = xy(y - x^2)$ umschreiben, weshalb die Kurve sich aus der x-Achse (Fall $y = 0$), der y-Achse (Fall $x = 0$) und einer Parabel $y = x^2$ (Fall $y - x^2 = 0$) zusammensetzt.



Insbesondere vereinfacht sich die Geradengleichung für die Tangenten an den Punkten $(x_0, x_0^2)^T$ zu

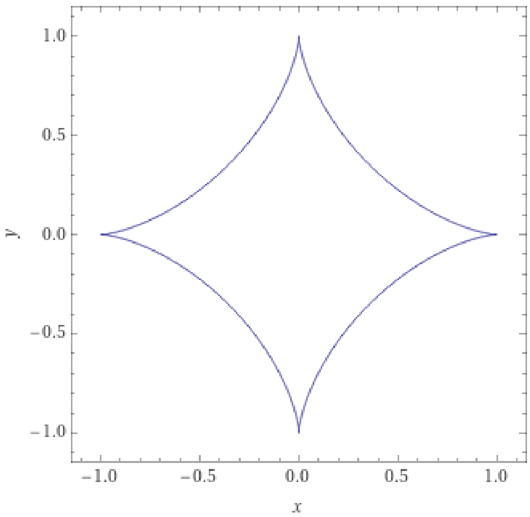
$$y(x) = 2x_0 x - x_0^2.$$

(d) Die partielle Ableitung von f_4 nach x ist genau dann Null, wenn $x = 0$ oder wenn gleichzeitig $x = \pm 1$ und $y = 0$. Die partielle Ableitung nach y ist genau für $y = 0$ und für gleichzeitig $x = 0$ und $y = \pm 1$ Null. Auf der Kurve liegen

- die singulären Punkte $(-1, 0)^T$, $(1, 0)^T$, $(0, -1)^T$ und $(0, 1)^T$;
- keine Punkte mit horizontalen Tangenten;
- keine Punkte mit vertikalen Tangenten.

Die Geradengleichung für die Tangenten an allen anderen Punkten $(x_0, y_0)^T$ ist

$$y(x) = y_0 - \frac{x_0\big(((x_0^2 + y_0^2 - 1)^2 + 9y_0^2\big)}{y_0\big((x_0^2 + y_0^2 - 1)^2 + 9x_0^2\big)}(x - x_0).$$



(e) Die partielle Ableitung von f_5 nach x ist genau dann Null, wenn $x = \pm 1$. Die partielle Ableitung nach y ist genau für $y = 1$ Null. Auf der Kurve liegen

- keine singulären Punkte;
- die Punkte $(-1, 1 - \sqrt{2})^T$ und $(-1, 1 + \sqrt{2})^T$ mit horizontalen Tangenten;
- die Punkte $(-\sqrt{3}, 0)^T$, $(0, 0)^T$ und $(\sqrt{3}, 0)^T$ mit vertikalen Tangenten.

Die Geradengleichung für die Tangenten an allen anderen Punkten $(x_0, y_0)^T$ ist

$$y(x) = y_0 + \frac{3x_0^2 - 3}{2y_0 - 2}(x - x_0).$$