Tutorium Mathematik II, M

Blatt 9

21. Mai 2021

***Aufgabe 9.1.** Ermitteln Sie alle lokalen Extremstellen der folgenden Funktionen.

(a) $f_1(x, y) = (x^2 + y - 1)y^2$ auf $\mathbb{R}^2$;

(b) $f_2(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 - y^2 = 1$;

(c) $f_3(x, y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$;

(d) $f_4(x, y) = x$ unter der Nebenbedingung $(x^2 + y^2)^2 + 4x(x^2 + y^2) - 4y^2 = 0$.

Aufgabe 9.2. Ermitteln Sie alle lokalen Extremstellen der folgenden Funktionen.

(a) $f_1(x, y) = e^{-2xy}(x + y)$ auf $\mathbb{R}^2$;

(b) $f_2(x, y) = x^2 + xy - y^3$ auf $\mathbb{R}^2$;

(c) $f_3(x, y) = y^2 e^x - 3y^2 + \frac{1}{2}x^2 - x(1 + \ln(3))$ auf $\mathbb{R}^2$;

(d) $f_4(x, y) = e^x \ln(y^2 + 1)$ auf $\mathbb{R}^2$;

(e) $f_5(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $(x - 2)^2 + y^2 = 1$;

(f) $f_6(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 y = 0$;

(g) $f_7(x, y) = 7x + 5y$ unter der Nebenbedingung $49x^2 + 25y^2 = 1225$;

(h) $f_8(x, y) = y$ unter der Nebenbedingung $(x^2 + y^3)^2 + 8x^2 - 8y^3 = 0$.

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 9.2. (a) Die Funktion f_1 besitzt ein lokales Maximum an der Stelle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und ein lokales Minimum an der Stelle $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

(b) Die Funktion f_2 besitzt ein lokales Minimum an der Stelle $(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})$. An der Stelle $(0, 0)$ liegt zwar ein stationärer Punkt vor, dabei handelt es sich aber um einen Sattelpunkt.

(c) Die Funktion f_3 besitzt ein lokales Minimum an der Stelle $(1 + \ln(3), 0)$. An den Stellen $(\ln(3), \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ liegen zwar stationäre Punkte vor, dabei handelt es sich aber um Sattelpunkte.

(d) Die Funktion f_4 besitzt stationäre Punkte an allen Stellen $(x_0, 0)$. In diesem Fall liefert die Hessematrix keine Aussage über Extremstellen. Allerdings gilt $f_4(x_0, 0) = 0$ und $f_4(x, y) > 0$ für $y \neq 0$, also sind alle Stellen $(x_0, 0)$ (sogar globale) Minima.

(e) Die Funktion f_5 besitzt unter der genannten Nebenbedingung ein (sogar globales) Maximum an der Stelle $(3, 0)$ und ein (sogar globales) Minimum an der Stelle $(1, 0)$.

(f) Die Funktion f_6 besitzt unter der genannten Nebenbedingung lokale Minima an den Stellen $(1, 0)$ und $(0, -1)$.

(g) Die Funktion f_7 besitzt unter der genannten Nebenbedingung ein (sogar globales) Maximum an der Stelle $(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}})$ und ein (sogar globales) Minimum an der Stelle $(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{\sqrt{2}})$.

(h) Die Funktion f_8 besitzt unter der genannten Nebenbedingung ein (sogar globales) Maximum an der Stelle $(0, 2)$ und ein (sogar globales) Minimum an der Stelle $(0, 0)$. Achtung: Wendet man die Lagrange Methode an und stellt die Hilfsfunktion $F_8(x, y, \lambda) = y + \lambda((x^2 + y^3)^2 + 8x^2 - 8y^3)$ auf, dann findet man als stationären Punkt von F_8 nur den Punkt $(0, 2)$. Im Punkt $(0, 0)$ ist der Gradient der Funktion $g_8(x, y) = (x^2+y^3)^2+8x^2-8y^3$, die die Nebenbedingung beschreibt, der Nullvektor.