

**Mathematik II SS 2021**  
**11. Übungsblatt**  
**17.6.2021**

**Aufgabe 11.1.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Differentialgleichungen exakt sind und bestimmen Sie ihre Lösungen (gegebenenfalls mit Hilfe eines integrierenden Faktors). Lösen Sie dabei die implizite Gleichung  $f(x, y) = c$  nach  $y$  auf und ermitteln Sie diejenige Lösung, die  $y(1) = 2$  erfüllt.

(a)  $2x^2y^2 - x^2 + \frac{2y}{x} + (4x^3y - 1)y' = 0$  mit  $x > 0$ ;

(b)  $\frac{x}{y} - \frac{x^2 + y^2}{2y^2}y' = 0$ .

**Aufgabe 11.2.** Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen sowie ihre Einhüllenden. Stellen Sie dabei die Einhüllenden in der Form  $y = f(x)$  oder  $x = g(y)$  dar. Skizzieren Sie die Lösungen der Differentialgleichungen und ihre Einhüllenden.

(a)  $y = xy' + \frac{1}{y'}$ ;

(b)  $y = xy' + \cosh(y')$ .

**Aufgabe 11.3.** Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

(a)  $y'' = \frac{1}{x}$  für  $x > 0$ ;

(b)  $y'' = \frac{3y'}{x} - 1$  für  $x > 0$ ;

(c)  $y'' = \frac{(y')^2}{y - 1}$ .

**Aufgabe 11.4.** Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen für  $x > 0$ .

(a)  $x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = 0$ ;

(b)  $x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' + 6y = 0$ .

**Aufgabe 11.5.** Berechnen Sie das Integral der Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^3}{(1 + x^2y)^2}$$

über das Rechteck  $Q = [0, \sqrt{2}] \times [0, 1]$

- indem Sie zuerst  $F(x) := \int_0^1 f(x, y) dy$  und danach  $\int_0^{\sqrt{2}} F(x) dx$  berechnen;
- indem Sie zuerst  $G(y) := \int_0^{\sqrt{2}} f(x, y) dx$  mit Hilfe der Substitution  $u = x^2y$  berechnen und danach  $\int_0^1 G(y) dy$  durch partielle Integration ermitteln.

Vergleichen Sie den Rechenaufwand für die beiden Lösungswege.

**Aufgabe 11.6.** Integrieren Sie die Funktionen

$$f(x, y) = x^2 \sin(y)e^{-x^3} + y^2 \sinh(x)$$

$$g(x, y) = \sin(x + y) + \cos\left(x + \frac{y}{2}\right)$$

jeweils über das Rechteck  $Q = [-1, 1] \times [0, 2\pi]$ .

*Hinweis.* Wenn Sie sich zuerst Gedanken über die Reihenfolge der Integration machen, könnte die Rechnung einfacher werden.