

Mathematik II SS 2021
11. Übungsblatt
17.6.2021

Aufgabe 11.1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Differentialgleichungen exakt sind und bestimmen Sie ihre Lösungen (gegebenenfalls mit Hilfe eines integrierenden Faktors). Lösen Sie dabei die implizite Gleichung $f(x, y) = c$ nach y auf und ermitteln Sie diejenige Lösung, die $y(1) = 2$ erfüllt.

(a) $2x^2y^2 - x^2 + \frac{2y}{x} + (4x^3y - 1)y' = 0$ mit $x > 0$;

(b) $\frac{x}{y} - \frac{x^2 + y^2}{2y^2}y' = 0$.

Aufgabe 11.2. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen sowie ihre Einhüllenden. Stellen Sie dabei die Einhüllenden in der Form $y = f(x)$ oder $x = g(y)$ dar. Skizzieren Sie die Lösungen der Differentialgleichungen und ihre Einhüllenden.

(a) $y = xy' + \frac{1}{y'}$;

(b) $y = xy' + \cosh(y')$.

Aufgabe 11.3. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

(a) $y'' = \frac{1}{x}$ für $x > 0$;

(b) $y'' = \frac{3y'}{x} - 1$ für $x > 0$;

(c) $y'' = \frac{(y')^2}{y - 1}$.

Aufgabe 11.4. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen für $x > 0$.

(a) $x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = 0$;

(b) $x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' + 6y = 0$.

Aufgabe 11.5. Berechnen Sie das Integral der Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^3}{(1 + x^2y)^2}$$

über das Rechteck $Q = [0, \sqrt{2}] \times [0, 1]$

- indem Sie zuerst $F(x) := \int_0^1 f(x, y) dy$ und danach $\int_0^{\sqrt{2}} F(x) dx$ berechnen;
- indem Sie zuerst $G(y) := \int_0^{\sqrt{2}} f(x, y) dx$ mit Hilfe der Substitution $u = x^2y$ berechnen und danach $\int_0^1 G(y) dy$ durch partielle Integration ermitteln.

Vergleichen Sie den Rechenaufwand für die beiden Lösungswege.

Aufgabe 11.6. Integrieren Sie die Funktionen

$$f(x, y) = x^2 \sin(y)e^{-x^3} + y^2 \sinh(x)$$

$$g(x, y) = \sin(x + y) + \cos\left(x + \frac{y}{2}\right)$$

jeweils über das Rechteck $Q = [-1, 1] \times [0, 2\pi]$.

Hinweis. Wenn Sie sich zuerst Gedanken über die Reihenfolge der Integration machen, könnte die Rechnung einfacher werden.