Mathematik II SS 2021
12. Übungsblatt
24.6.2021

Aufgabe 12.1. Berechnen Sie die Integrale

$$\iint_B e^{-x^2}\,dxdy \qquad \text{und} \qquad \iint_B e^{-y^2}\,dxdy,$$

wobei B das Dreieck mit den Eckpunkten $(2,0)$, $(2,1)$ und $(0,1)$ bezeichnet.

Aufgabe 12.2. Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = 8xy$ über den Bereich B, der durch $y \geq x^2$, $y \leq 8 - x^2$ und $y \geq x + 2$ definiert ist.

Aufgabe 12.3. Gegeben sind ein Zylinder der Höhe H mit kreisförmiger Grundfläche vom Radius R sowie ein gerader Kegel (d.h. die Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche) mit Höhe R und kreisförmiger Grundfläche vom Radius R. Die beiden Grundflächen der Körper werden verklebt. Welchen Wert muss H (in Abhängigkeit von R) annehmen, damit der Schwerpunkt des entstehenden Körpers genau im Mittelpunkt der Klebefläche liegt? Die Dichte kann konstant $\rho = 1$ angenommen werden.
Überlegen Sie sich zuerst geometrisch, wie Sie den Körper im Koordinatensystem platzieren möchten und welche Koordinaten des Schwerpunktes Sie überhaupt ausrechnen müssen. Falls nötig, dürfen Sie Formeln für die Masse von Zylindern und Kegeln ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 12.4. Der Torus[1]

$$T = \{(x,y,z) \mid (x^2+y^2+z^2+8)^2 \leq 36(x^2+y^2)\}$$

kann durch die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x(r,\varphi,\theta) \\ y(r,\varphi,\theta) \\ z(r,\varphi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 + r\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ (3 + r\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

mit $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$ und $\theta \in [0,2\pi]$ beschrieben werden. Berechnen Sie die Jacobideterminante dieser Koordinatentransformation und ermitteln Sie die Masse (mit konstanter Dichte $\rho = 1$) und das Trägheitsmoment I_z von T.

Aufgabe 12.5. Gegeben ist die Hohlkugel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}.$$

Berechnen Sie die Integrale der Funktionen

(a) $f(x,y,z) = y(x+2z)$

(b) $g(x,y,z) = x - yz$

(c) $h(x,y,z) = 5(x^2+y^2+z^2)$

über K.

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Torus`

Aufgabe 12.6. Das Kraftfeld

$$\vec{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

bezeichnet (bis auf einen konstanten Faktor) die Kraft, die ein im Koordinatenursprung liegender Massepunkt auf einen Körper am Ort (x,y,z) ausübt. Bestimmen Sie durch Wegintegrale die Arbeit, die verrichtet wird, wenn ein Körper sich im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ entlang der folgenden Kurven bewegt.

(a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \sqrt{2}\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$;

(b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2t \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$ mit $T > 0$;

(c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2t \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, $t_1 = -T$, $t_2 = 0$ mit $T > 0$.