

## Mathematik II SS 2021

### 3. Übungsblatt

25.3.2021

**Aufgabe 3.1.** Wir betrachten zu den Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

den von ihnen erzeugten Untervektorraum  $U = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$  von  $\mathbb{R}^4$ . Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von  $U$ .

**Aufgabe 3.2.** Wenden Sie auf die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an; einmal in der Reihenfolge  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ , einmal in der Reihenfolge  $\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2$  und einmal in der Reihenfolge  $\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1$ .

**Aufgabe 3.3.** Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen annehmen, dass  $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$  eine Basis des  $\mathbb{R}^4$  ist. (Sie müssen dies also *nicht* nachrechnen.) Bestimmen Sie die Koordinaten von  $\vec{x}$  bezüglich  $B$ .

**Aufgabe 3.4.** Weisen Sie nach, dass  $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$  und  $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$  mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jeweils Basen des  $\mathbb{R}^3$  sind und berechnen Sie die Transformationsmatrix von der Basis  $C$  auf die Basis  $B$ , das heißt, diejenige Matrix  $T$ , die für jeden Vektor mit Koordinatenvektor  $\vec{v}_B$  bezüglich  $B$  und Koordinatenvektor  $\vec{v}_C$  bezüglich  $C$  die Gleichung  $\vec{v}_B = T\vec{v}_C$  erfüllt.

**Aufgabe 3.5.** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 3.6.** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 4 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$