Mathematik II SS 2021
4. Übungsblatt
15.4.2021

Aufgabe 4.1. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

drei verschiedene Eigenwerte hat und geben Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor mit Länge 1 an. Schreiben Sie diese Eigenvektoren als Spalten in eine Matrix S und verwenden Sie dieses Ergebnis, um A^{2021} auszurechnen.

Aufgabe 4.2. Bestimmen Sie alle *komplexen* Zahlen, die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind und bestimmen Sie für jeden Eigenwert alle Eigenvektoren in $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 4.3. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

einen Eigenwert λ_1 mit (algebraischer) Vielfachheit 3 besitzt, und finden Sie einen Vektor $\vec{v}_1$, sodass der allgemeine Eigenvektor zu λ_1 von der Form

$$t\vec{v}_1, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ist. Finden Sie anschließend Vektoren $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ mit

$$(B - \lambda_1 I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \quad \text{und} \quad (B - \lambda_1 I)\vec{v}_3 = \vec{v}_2.$$

Aufgabe 4.4. Welcher Kegelschnitt wird durch die Gleichung

$$2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = 1$$

definiert? Für die Lösung sollten Sie angeben: Typ (Ellipse, Hyperbel etc.) des Kegelschnittes, seine Lage und Ausrichtung (Verschiebungsvektor und Drehwinkel) sowie gegebenenfalls seine Halbachsen, Scheitelpunkte, Steigung etc.

Aufgabe 4.5. Welcher Kegelschnitt wird durch die Gleichung

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2 = 2$$

definiert? Für die Lösung sollten Sie angeben: Typ (Ellipse, Hyperbel etc.) des Kegelschnittes, seine Lage und Ausrichtung (Verschiebungsvektor und Drehwinkel) sowie gegebenenfalls seine Halbachsen, Scheitelpunkte, Steigung etc.

Aufgabe 4.6. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

(a) $\cosh(x)y'(x) + \sinh(x)y(x) = 6x$;

(b) $\cosh(x)y'(x) + \sinh(x)y(x) = \cosh(x)$;

(c) $\cosh(x)y'(x) - \sinh(x)y(x) = 2\tanh(x)$.