Mathematik II SS 2021
6. Übungsblatt
29.4.2021

Aufgabe 6.1. Für welche Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 5 & \alpha & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 3 \end{pmatrix}$$

(i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen? Geben Sie im Fall (iii) die allgemeine Lösung an.

Aufgabe 6.2. Weisen Sie nach, dass $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ und $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jeweils Basen des $\mathbb{R}^3$ sind und berechnen Sie die Transformationsmatrix von der Basis B auf die Basis C, das heißt, diejenige Matrix T, die für jeden Vektor mit Koordinatenvektor $\vec{v}_B$ bezüglich B und Koordinatenvektor $\vec{v}_C$ bezüglich C die Gleichung $\vec{v}_C = T\vec{v}_B$ erfüllt.

Aufgabe 6.3. Welcher Kegelschnitt wird durch die Gleichung

$$3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 = 5$$

definiert? Für die Lösung sollten Sie angeben: Typ (Ellipse, Hyperbel etc.) des Kegelschnittes, seine Lage und Ausrichtung (Verschiebungsvektor und Drehwinkel) sowie gegebenenfalls seine Halbachsen, Scheitelpunkte, Steigung etc.

Aufgabe 6.4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 6xe^{2x} + 5\sin(x).$$

Aufgabe 6.5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Aufgabe 6.6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$