Mathematik II SS 2021
7. Übungsblatt
6.5.2021

Aufgabe 7.1. Berechnen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2(\sin(t))^3 - 3\sin(t) \\ 4(\cos(t))^3 \end{pmatrix}$$

für jeden Zeitpunkt t den Ableitungsvektor $\dot{\vec{x}}(t)$ und ermitteln Sie alle Zeitpunkte, zu denen dieser Ableitungsvektor horizontal oder vertikal verläuft oder $\vec{0}$ ist (singuläre Punkte). Geben Sie für jeden solchen Zeitpunkt t_0 den Punkt $\vec{x}(t_0)$ auf der Kurve und den Ableitungsvektor $\dot{\vec{x}}(t_0)$ and.

Aufgabe 7.2. Berechnen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$ die Bogenlänge $s(t)$, wobei $s(0) = 0$ gelten soll. Geben Sie danach die natürliche Parametrisierung $\vec{x}(s)$ der Kurve an.
Hinweis: Achtung auf Vorzeichen!

Aufgabe 7.3. Bestimmen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\cos(2t) \\ \sin(t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix}$$

die Scheitelpunkte sowie die dazugehörigen Scheitelkrümmungen. Geben Sie für die Scheitelpunkte sowohl die Zeit t als auch den zugehörigen Punkt $\vec{x}(t)$ auf der Kurve an.

Aufgabe 7.4. Gegeben sei die Kurve $\vec{\gamma}$, welche der Graph der Funktion

$$f(x) = \ln(x)$$

ist (also $\vec{\gamma} = (x, f(x))$). Bestimmen Sie für jedes $x > 0$ die Krümmung $\kappa(x)$ sowie den Mittelpunkt $(\xi(x), \eta(x))$ des Krümmungskreises. Bestimmen Sie danach den Scheitelpunkt $(x_0, f(x_0))$ von $\vec{\gamma}$ und zeigen Sie, dass für die Kurve $\vec{\varepsilon}(x) = (\xi(x), \eta(x))$ zum Zeitpunkt $x = x_0$ ein singulärer Punkt vorliegt.

Aufgabe 7.5. Die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4t - 3t^3 \\ 6t^2 \end{pmatrix}$$

bildet eine Schleife. Das heißt, es gibt genau zwei Zeitpunkte $t_1 \neq t_2$ mit $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$. Ermitteln Sie die Werte t_1, t_2 und die Bogenlänge sowie den überstrichenen Flächeninhalt zwischen diesen Zeitpunkten.

Aufgabe 7.6. Die Kurve $r(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi}$ ist in Polarkoordinaten gegeben. Bestimmen Sie die Bogenlänge und den überstrichenen Flächeninhalt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \Phi$ für $\Phi > 0$. Was geschieht für $\Phi \to \infty$?
Hinweis: Für die Bogenlänge könnten sich die Substitution $u = 1 + \varphi$ und partielle Integration als hilfreich erweisen.