

**Mathematik II SS 2021**  
**8. Übungsblatt**  
**20.5.2021**

**Aufgabe 8.1.** Gegeben ist die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cos(t)^2 \\ 5 \sin(t) \cos(t) \\ -3 \sin(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Formen Sie die Kurve in ihre natürliche Parametrisierung um und berechnen Sie das begleitende Dreibein in Abhängigkeit der Bogenlänge.

**Aufgabe 8.2.** Berechnen Sie das begleitende Dreibein  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  der Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2t^2 \\ \frac{1}{3}t^3 \\ 8t \end{pmatrix}$$

und rechnen Sie nach, dass  $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$  gilt.

**Aufgabe 8.3.** Berechnen Sie Krümmung und Torsion der Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ 2e^t \\ -\cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Wann sind Krümmung bzw. Torsion maximal und wann minimal?

**Aufgabe 8.4.** Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y, z) = \sin(2xy + 2z^2) + xy^2 + 2x + yz^2 + yz + 2z$$

(a) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von  $f$  am Punkt  $P$  in die Richtungen  $\vec{r}$  und  $\vec{s}$ , wobei

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{s} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(b) In welche Richtungen ist die Richtungsableitung im Punkt  $P$  minimal, in welche maximal und in welche ist sie Null? Geben Sie zu den Richtungen mit minimaler und maximaler Richtungsableitung auch die zugehörigen Werte der Richtungsableitung an.

Erinnerung: Richtungen sind immer *normierte* Vektoren.

**Aufgabe 8.5.** Eine Kurve sei implizit durch die Gleichung

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 8x^2 - 8y^2 = 0$$

gegeben. Ermitteln Sie alle singulären Punkte und alle Punkte, an denen horizontale oder vertikale Tangenten vorliegen. Geben Sie außerdem für alle anderen Punkte die Geradengleichung der Tangente an und skizzieren Sie die Kurve. (Für die Skizze können Sie einen Computer verwenden.)

**Aufgabe 8.6.** Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} byz - ax^2 \\ bxz - a^2z \\ xy - y + az^2 \end{pmatrix}$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- (a) Für welche Werte von  $a, b$  ist  $\vec{v}(x, y, z)$  quellenfrei, für welche Werte ist  $\vec{v}(x, y, z)$  wirbelfrei?
- (b) Wenn  $\vec{v}(x, y, z)$  nicht quellenfrei ist, wo liegen dann die Quellen und Senken?