Mathematik II SS 2021
9. Übungsblatt
27.5.2021

Aufgabe 9.1. Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y = 0, \\ \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{t \to 0} f(t, t^2).$$
Was bedeutet dies für die Stetigkeit der Funktion im Punkt $x_0 = y_0 = 0$?

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitungen von f im Punkt $x_0 = y_0 = 0$ in eine allgemeine Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (d.h. $\|\vec{r}\| = 1$).

Aufgabe 9.2. Ermitteln Sie alle lokalen Extremstellen der Funktionen

$$f(x,y) = (x-y)e^{xy} \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = (x-y)e^{-xy}$$

auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 9.3. Ermitteln Sie alle lokalen Extremstellen der Funktionen

$$f(x,y) = 2x\sqrt{y^2+1} - x^2 \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = x^3 + 6xy - y^3$$

auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 9.4. Berechnen Sie alle stationären Punkte der Funktionen

$$f(x,y) = x^2 \sinh(y) \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + 2y^4$$

auf $\mathbb{R}^2$ und zeigen Sie, dass die Hessematrix an diesen Stellen *keine* Aussage darüber liefert, ob es sich um Extremstellen oder Sattelpunkte handelt.
Untersuchen Sie anschließend, an welchen Stellen die Funktionen positiv/negativ sind und unterscheiden Sie auf diese Art, wo lokale Maxima, lokale Minima und Sattelpunkte liegen.

Aufgabe 9.5. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung $25x^2 + 16y^2 = 400$,

(a) indem Sie die Nebenbedingung nach einer Variablen auflösen und in f einsetzen;

(b) durch Parametrisieren der durch die Nebenbedingung beschriebenen Kurve;

(c) mit Hilfe der Lagrange Methode.

Aufgabe 9.6. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy^2 - 54x$$

unter der Nebenbedingung $xy^3 - x^3y = 0$.