Formelsammlung Mathematik II, M

Sommersemester 2020/21; 501.014 (VO) und 501.015 (UE)

Determinanten

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

Entwicklung nach einer Zeile/Spalte: Für jedes j ist

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A_{kj}).\end{aligned}$$

A_{jk} entspricht hierbei A ohne j-te Zeile und k-te Spalte.

Invertierbarkeitskriterium: A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

Cramersche Regel: Ist A eine invertierbare Matrix, dann hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung

$$\frac{1}{\det(A)}\big(\det(A_1), \dots, \det(A_n)\big)^T,$$

wobei A_i aus A entsteht, indem man die i-te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt.

Inverse von 2×2 Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}.$$

Inverse von $n \times n$ Matrizen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(A^{\#}\right)^T \quad \text{mit} \quad \left(A^{\#}\right)_{jk} = (-1)^{j+k}\det(A_{jk}).$$

A_{jk} entspricht hierbei A ohne j-te Zeile und k-te Spalte.

Basen und Koordinatentransformation

Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$, falls die Matrix $B = \left(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\right)$ Rang n hat, also $\det(B) \neq 0$.

Transformationsmatrix: Die Transformationsmatrix von einer Basis B zu einer Basis C ist die Matrix

$$T = C^{-1}B.$$

Hat ein Punkt die Koordinaten $\vec{v}_B$ zur Basis B und $\vec{v}_C$ zur Basis C, dann gilt

$$\vec{v}_C = T\vec{v}_B.$$

Kegelschnitte und Hauptachsentransformation

Die Gleichung

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

beschreibt einen Kegelschnitt. Äquivalent hierzu ist

$$\vec{x}^T A\vec{x} + \vec{p}^T\vec{x} + f = 0 \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} \text{ und } \vec{p} = \begin{pmatrix} d \\ e\end{pmatrix}.$$

Fall $\det(A) \neq 0$:

- Berechne $\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p}$ und $C = \frac{1}{2}\vec{p}^T\vec{q} + f$.
- Die Substitution $\vec{x} = \vec{y} + \vec{q}$ liefert die Gleichung
$$\vec{y}^T A\vec{y} + C = 0.$$
- Bestimme die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A sowie normierte Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \beta_1\end{pmatrix}$ zu λ_1 und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}\alpha_2 \\ \beta_2\end{pmatrix}$ zu λ_2, wobei $\beta_1 = -\alpha_2 \geq 0$ gelten sollte.
- Für den Winkel $\varphi = \arccos(\alpha_1)$ gilt
$$S = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}.$$
- Die Substitution $\vec{y} = S\vec{z}$ liefert die Gleichung
$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + C = 0.$$
- Für die Lösungsmenge für $\vec{z}$ gilt

Koeffizienten	Lösungsmenge
$C = 0$ und λ_1, λ_2 gleiches Vorzeichen	$\{0\}$
$C = 0$ und λ_1, λ_2 verschiedene Vorz.	zwei Geraden durch $(0,0)$, $z_2 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\rvert} \cdot z_1$
Alle gleiches Vorz.	$\emptyset$
λ_1, λ_2 gleiches Vorz., C anderes Vorzeichen	Ellipse mit Achsenlängen $l_1 = \sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_1}\right\rvert}$, $l_2 = \sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_2}\right\rvert}$
λ_1, λ_2 versch. Vorz. C, λ_1 gleiches Vorz.	Hyperbel in 2. Hauptlage Scheitelpunkte bei $z_2 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_2}\right\rvert}$
λ_1, λ_2 versch. Vorz. C, λ_2 gleiches Vorz.	Hyperbel in 1. Hauptlage Scheitelpunkte bei $z_1 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_1}\right\rvert}$
beide vorigen Fälle	Asymptoten $z_2 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\rvert} \cdot z_1$

Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist die Lösungsmenge für $\vec{z}$ um φ gedreht und danach um $\vec{q}$ verschoben.

Fall $\det(A) = 0$:

Falls $A = 0$, ist die Lösungsmenge eine Gerade, deren Lage von d, e, f abhängt. Ansonsten:

- Ein Eigenwert von A ist $\lambda_2 = 0$, berechne den anderen Eigenwert λ_1 und Eigenvektoren $\vec{v}_1$ zu λ_1 und $\vec{v}_2$ zu λ_2. Wähle dabei $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ wie im Fall $\det(A) \neq 0$.
- Berechne
$$\begin{pmatrix} g \\ h\end{pmatrix} = S^T\vec{p}.$$
- Bestimme den Drehwinkel φ wie im Fall $\det(A) \neq 0$.
- Die Substitution $\vec{x} = S\vec{y}$. liefert die Gleichung
$$\lambda_1 y_1^2 + gy_1 + hy_2 + f = 0.$$

- Falls $h = 0$, dann gilt für die Lösungsmenge für $\vec{y}$

Koeffizienten	Lösungsmenge
$g^2 - 4f\lambda_1 < 0$	$\emptyset$
$g^2 - 4f\lambda_1 = 0$	Gerade $y_1 = -\frac{g}{2\lambda_1}$
$g^2 - 4f\lambda_1 > 0$	zwei Geraden $y_1 = -\frac{g \pm \sqrt{g^2-4f\lambda_1}}{2\lambda_1}$

- Falls $h \neq 0$, dann ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ eine Parabel mit Scheitelpunkt $\left(-\frac{g}{2\lambda_1}, \frac{g^2}{4\lambda_1 h} - \frac{f}{h}\right)^T$, geöffnet nach oben, falls $\frac{h}{\lambda_1} < 0$, ansonsten nach unten geöffnet.

Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ um φ gedreht.

Lineare Differentialgleichungen

Die allg. Lösung einer homogenen DGL 1. Ordnung

$$a(x)y(x) + b(x)y'(x) = 0 \qquad \text{ist}$$
$$y_H(x) = C \cdot \exp\left(-\int \frac{a(x)}{b(x)}dx\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Variation der Konstanten:
Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$a(x)y(x) + b(x)y'(x) = f(x) \qquad \text{ist}$$
$$y_P(x) = s(x) \cdot \int \frac{f(x)}{b(x)s(x)}dx,$$
$$\text{mit } s(x) = \exp\left(-\int \frac{a(x)}{b(x)}dx\right).$$

Charakteristisches Polynom: Zu einer DGL

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

gibt es das charakteristische Polynom

$$a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$

Allg. Lösung einer homogenen DGL mit konstanten Koeffizienten: Ein Fundamentalsystem einer homogenen DGL ist gegeben durch die folgenden Funktionen:

- Für jede reelle Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms die Funktionen $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$, wobei k die Vielfachheit der Nullstelle ist, sowie
- für jedes Paar komplexer Nullstellen $\alpha \pm \beta i$ des charakteristischen Polynoms die Funktionen $e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ und $e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, wobei k die Vielfachheit der Nullstellen ist.

Variation der Konstanten bei DGL zweiter Ordnung: Ist $y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

dann ist $y_P(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ eine Lösung der inhomogenen DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \qquad \text{wobei}$$
$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}dx \quad \text{und}$$
$$c_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}dx.$$

Spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen:

Störfunktion	**Ansatz für $y_P(x)$**	**Nullst.?**
$P(x)$	$Q(x)$	0
$e^{\alpha x}P(x)$	$e^{\alpha x}Q(x)$	α
$P(x)\sin(\beta x)$, $Q(x)\cos(\beta x)$ oder gemischt	$R(x)\sin(\beta x) + S(x)\cos(\beta x)$	βi
$ae^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $be^{\alpha x}\cos(\beta x)$ oder gemischt	$e^{\alpha x}\big(c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)\big)$	$\alpha + \beta i$

Der Grad der Polynome im speziellen Ansatz ist so groß wie der größte Grad der Polynome in der Störfunktion. Ist der in der Spalte „Nullst.?“ genannte Wert eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, muss der Ansatz mit x^k multipliziert werden.

Systeme von Differentialgleichungen

Homogene Systeme: Hat die $n \times n$ Matrix A ausschließlich Eigenwerte der Vielfachheiten 1 und 2, dann ist ein Fundamentalsystem des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

gegeben durch die folgenden Funktionen:

- Für jeden einfachen Eigenwert λ_i mit Eigenvektor $\vec{v}_i$ die Funktion $e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$,
- für jeden doppelten Eigenwert λ_i mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren $\vec{v}_i$, $\vec{w}_i$ die Funktionen $e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ und $e^{\lambda_i t}\vec{w}_i$,
- für jeden doppelten Eigenwert λ_i, für den es keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren gibt, die Funktionen $e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ und $e^{\lambda_i t}(t\vec{v}_i + \vec{w}_i)$, wobei $\vec{v}_i$ ein Eigenvektor zu λ_i ist und $\vec{w}_i$ ein Vektor mit

$$(A - \lambda_i I_n)\vec{w}_i = \vec{v}_i.$$

Inhomogene Systeme: Bilden $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ ein Fundamentalsystem des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x},$$

dann ist

$$\vec{x}_P(t) = \vec{Y}(t)\vec{c}(t)$$

eine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{s},$$

wobei $\vec{Y}(t)$ die Matrix $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ ist und $\vec{c}(t)$ durch

$$\dot{\vec{c}} = \vec{Y}(t)^{-1}\vec{s}$$

bestimmt wird.

Ebene Kurven

	Kartesische Koordinaten	Parameterdarstellung
Kreis	$x^2 + y^2 = R^2$	$x(t) = R\cos(t)$ $y(t) = R\sin(t)$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x(t) = a\cos(t)$ $y(t) = b\sin(t)$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x(t) = \pm a\cosh(t)$ $y(t) = b\sinh(t)$

Tangente: $\dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}$. *Singulärer Punkt:* Tangente $\vec{0}$.
Bogenlänge: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$
In Polarkoordinaten: $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}d\varphi$
Krümmung:

Parameterdarstellung	Falls $y = y(x)$
$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\kappa = \frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Krümmungskreis: Kreis mit Radius $\frac{1}{\kappa(P)}$ und Mittelpunkt (ξ, η) berührt Kurve in P und hat Krümmung κ.

$$\xi = x - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{y}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{x}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

in Parameterdarstellung. Falls $y = y(x)$, dann

$$\xi = x - \frac{(1 + (y')^2)y'}{y''} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}.$$

Evolute: Menge der Mittelpunkte der Krümmungskreise
Überstrichener Flächeninhalt:

Parameterdarstellung	Polarkoordinaten
$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt$	$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2 d\varphi$

Raumkurven
Bogenlänge: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}dt$

Tangentenvektor $\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

Hauptnormalvektor $\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} = \frac{\ddot{\vec{x}} - \left\langle \ddot{\vec{x}}, \vec{t}\right\rangle \vec{t}}{\left|\ddot{\vec{x}} - \left\langle \ddot{\vec{x}}, \vec{t}\right\rangle \vec{t}\right|} = \vec{b} \times \vec{t}$

Binormalvektor $\vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{\left|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\right|} = \vec{t} \times \vec{n}$

Krümmung: $\kappa = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$

Torsion: $\tau = -\left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{n}\right\rangle = \left\langle \vec{b}, \frac{d\vec{n}}{ds}\right\rangle = \frac{\left\langle \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}\right\rangle}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|^2}$

Differentialrechnung in mehreren Variablen
Richtungsableitung im Punkt $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{r}$ (mit $|\vec{r}| = 1$) ist $\langle \nabla f(\vec{x}_0, \vec{r}\rangle$, falls alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.

Divergenz: Für $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix}P(x, y)\\ Q(x, y)\end{pmatrix}$ ist $\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.

Für $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix}P(x, y, z)\\ Q(x, y, z)\\ R(x, y, z)\end{pmatrix}$ ist $\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Ein Punkt mit positiver Divergenz heißt *Quelle* von $\vec{v}$, ein Punkt mit negativer Divergenz heißt *Senke*. Falls es keine Quellen und Senken gibt, heißt $\vec{v}$ *quellenfrei.*

Rotation: $\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix}\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\end{pmatrix}$. Das Feld heißt *wirbelfrei*, falls die Rotation überall dem Nullvektor entspricht.

Implizite Funktionen
Kurve in impliziter Form: $K = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$.
Singulärer Punkt auf K: $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.
Tangente horizontal: $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Tangente vertikal: $f_y(x_0, y_0) = 0$ und $f_x(x_0, y_0) \neq 0$.
Tangentengleichung allgemein:

$$\begin{aligned} y &= y_0 - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}(x - x_0), && \text{falls } f_y(x_0, y_0) \neq 0\\ x &= x_0, && \text{falls } f_y(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

Extremwerte von Funktionen in zwei Variablen
Gegeben ist eine Funktion $f(x, y)$, deren zweite partielle Ableitungen allesamt existieren und stetig sind.
Die Hesse-Matrix H_f heißt

- *positiv definit*, falls beide Eigenwerte positiv sind,
- *negativ definit*, falls beide Eigenwerte negativ sind,
- *indefinit*, falls ein positiver und ein negativer Eigenwert existiert.

Hauptminoren von H_f: $\Delta_1 = f_{xx}$ und $\Delta_2 = \det(H_f)$.
Kriterium für Definitheit:

- H_f pos. definit $\iff \Delta_1, \Delta_2 > 0$
- H_f neg. definit $\iff \Delta_1 < 0$ und $\Delta_2 > 0$
- H_f indefinit $\iff \Delta_2 < 0$

Notwendige Bedingung für Extrema: Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs sind stets *stationäre Punkte*, d.h. Punkte mit $\nabla f = \vec{0}$.
Hinreichende Bedingung für Extrema: Ist (x_0, y_0) ein stationärer Punkt von f, dann gilt für $H_f = H_f(x_0, y_0)$

- H_f negativ definit $\Longrightarrow (x_0, y_0)$ lokales Maximum;
- H_f positiv definit $\Longrightarrow (x_0, y_0)$ lokales Minimum;
- H_f indefinit $\Longrightarrow (x_0, y_0)$ Sattelpunkt.

Randextrema:

- Ist (x_0, y_0) ein Maximum von f auf dem Rand des Gebietes G, und zeigt der Gradient bei (x_0, y_0) in G hinein, so ist (x_0, y_0) *kein* Maximum auf G.
- Ist (x_0, y_0) ein Minimum von f auf dem Rand des Gebietes G, und zeigt der Gradient bei (x_0, y_0) aus G hinaus, so ist (x_0, y_0) *kein* Minimum auf G.

Ein Gebiet heißt *kompakt*, falls es beschränkt ist und jeden seiner Randpunkte enthält.
Eine stetige Funktion hat auf einem kompakten Gebiet stets ein globales Maximum und ein globales Minimum.

Extrema unter Nebenbedingungen
Ein Extremum (x_0, y_0) von $f(x, y)$ unter der Bedingung $g(x, y) = 0$ erfüllt mindestens eine der folgenden Bedingungen.

- $\nabla g(x_0, y_0) = \vec{0}$;
- Zu $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ gibt es ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = \vec{0}$.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bernoullische DGL: $y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0$ mit $\alpha \neq 0, 1$

- Substituiere $z = y^{1-\alpha}$.
- Bestimme die Lösung von $\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = -g(x)$.
- Lösung der ursprünglichen DGL ist $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ und für positives α auch $y = 0$.

Riccatische DGL: $y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x)$

- Finde part. Lösung y_p (Standardansätze $y = ae^{bx}$, $y = ax^b$ und $y = ax + b$) und substituiere $y = z + y_p$.
- Bestimme die Lösung von $z' + (f(x) + 2g(x)y_p)z + g(x)z^2 = 0$ und setze dies in $y = z + y_p$ ein.

Exakte DGL: $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ heißt *exakt*, falls $P_y = Q_x$. Es gibt dann eine Funktion $F(x, y)$, so dass die allgemeine Lösung durch die Gleichung $F(x, y) = c$ beschrieben wird. Man findet F wie folgt.

- Setze $F = \int P dx + \Phi(y)$ und berechne Φ aus der Bedingung $F_y = Q$ oder
- setze $F = \int Q dy + \Psi(x)$ und berechne Ψ aus der Bedingung $F_x = P$.

Integrierender Faktor: Ist $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ nicht exakt, suche eine Funktion $M(x)$ oder $M(y)$ mit

$$M \cdot (P_y - Q_x) = M_x Q \quad \text{bzw.} \quad M \cdot (P_y - Q_x) = -M_y P.$$

Dann ist $M \cdot P(x, y) + M \cdot Q(x, y)y' = 0$ exakt.

Clairautsche DGL: $y = xy' + h(y')$ hat die Lösungen $y = cx + h(c)$ für $c \in \mathbb{R}$. Einhüllende der Lösungen ist die Kurve $(x, y) = \big(-h'(t), -h'(t)t + h(t)\big)$.

DGL zweiter Ordnung:

- $y'' = f(x) \Longrightarrow y = \int \left(\int f(x)dx\right) dx + c_1 x + c_2$
- $y'' = f(x, y') \rightsquigarrow$ substituiere $z = y'$
- $y'' = f(y, y') \rightsquigarrow$ Löse die DGL $z' \cdot z = f(y, z)$. Löse dann die DGL $y' = z(y)$.

Eulersche DGL: $a_3x^3y''' + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$. Substituiere $x = e^t$ und $v(t) = y(e^t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-t} \cdot \dot{v}(t), \\ y''(x) &= e^{-2t} \cdot (\ddot{v}(t) - \dot{v}(t)), \\ \text{und} \quad y'''(x) &= e^{-3t} \cdot (\dddot{v}(t) - 3\ddot{v}(t) + 2\dot{v}(t)). \end{aligned}$$

Mehrfachintegrale

Ein Bereich der Form

$$B = \{(x, y) \mid a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$$

heißt *Normalbereich* bezüglich der y-Achse. Das Integral einer Funktion $f(x, y)$ über B ist dann

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Für einen Normalbereich bezüglich der x-Achse

$$B = \{(x, y) \mid a \le y \le b, g(y) \le x \le h(y)\}$$

ist das Intergral entsprechend

$$\int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Masse und Schwerpunkt: Fläche B in der (x, y)-Ebene mit Dichtefunktion $\rho(x, y)$ hat

Gesamtmasse	$M = \iint_B \rho(x, y) dxdy$
Stat. Moment zur x-Achse	$M_x = \iint_B y \cdot \rho(x, y) dxdy$
Stat. Moment zur y-Achse	$M_y = \iint_B x \cdot \rho(x, y) dxdy$
Schwerpunkt	$S = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right)$

Oberflächeninhalt: Die Fläche, die eine Funktion $f(x, y)$ über einem Bereich B definiert, hat den Inhalt

$$O = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy.$$

Masse und Schwerpunkt: Ein Bereich B im Raum mit Dichtefunktion $\rho(x, y, z)$ hat

Gesamtmasse	$M = \iiint_B \rho(x, y, z) dxdydz$
Schwerpunkt $\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}$	$x_s = \frac{\iiint_B x \cdot \rho(x, y, z) dxdydz}{M}$
	$y_s = \frac{\iiint_B y \cdot \rho(x, y, z) dxdydz}{M}$
	$z_s = \frac{\iiint_B z \cdot \rho(x, y, z) dxdydz}{M}$

Trägheitsmoment:

$$I_x = \iiint_B (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dxdydz \quad \text{bzgl. } x\text{-Achse}$$

$$I_y = \iiint_B (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dxdydz \quad \text{bzgl. } y\text{-Achse}$$

$$I_z = \iiint_B (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) dxdydz \quad \text{bzgl. } z\text{-Achse}$$

Polarkoordinaten: Für $x(r, \varphi) = r\cos(\varphi)$, $y(r, \varphi) = r\sin(\varphi)$ und $g(r, \varphi) = f\big(x(r, \varphi), y(r, \varphi)\big)$ gilt

$$\iint_B f(x, y) dxdy = \iint_B r \cdot g(r, \varphi) dr d\varphi.$$

Kugelkoordinaten: Für $x(r, \varphi, \theta) = r\cos(\varphi)\sin(\theta)$, $y(r, \varphi, \theta) = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z(r, \varphi, \theta) = r\cos(\theta)$ und $g(r, \varphi, \theta) = f\big(x(r, \varphi, \theta), y(r, \varphi, \theta), z(r, \varphi, \theta)\big)$ gilt

$$\iiint_B f(x, y, z) dxdydz = \iiint_B r^2 \sin(\theta) \cdot g(r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta.$$

Zylinderkoordinaten: Für $x(r, \varphi, z) = r\cos(\varphi)$, $y(r, \varphi, z) = r\sin(\varphi)$, $z(r, \varphi, z) = z$ und $g(r, \varphi, z) = f\big(x(r, \varphi, z), y(r, \varphi, z), z(r, \varphi, z)\big)$ gilt

$$\iiint_B f(x, y, z) dxdydz = \iiint_B r \cdot g(r, \varphi, z) dr d\varphi dz.$$

Kurvenintegrale: Das Integral über ein Vektorfeld

$$\vec{K}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$$

entlang einer Kurve $\vec{x}(t)$ ist definiert als

$$\int \left\langle \vec{K}\big(\vec{x}(t)\big), \dot{\vec{x}}(t) \right\rangle dt.$$

Oberflächenintegrale: Ist $\vec{K}$ ein Vektorfeld und F ein Flächenstück, dann ist das Integral von $\vec{K}$ auf F

$$\iint_B \left\langle \vec{K}\big(x, y, f(x, y)\big), \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dxdy,$$

wenn F in der Form $z = f(x, y)$ mit $(x, y) \in B$ gegeben ist und

$$\iint_B \left\langle \vec{K}\big(\vec{x}(u, v)\big), \vec{x}_u \times \vec{x}_v \right\rangle dudv,$$

wenn F in Parameterform $\vec{x}(u, v)$ gegeben ist.