Tutorium Mathematik I, M

Blatt 2

28. Oktober 2022

***Aufgabe 2.1.** Gegeben sind die Geraden

$$f\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}, \qquad g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}, \qquad h\colon 10x + 4y = 24.$$

(a) Ermitteln Sie Normalformen von f und g sowie eine Parameterform von h.

(b) Bestimmen Sie alle Lagebeziehungen zwischen den Geraden und ggf. die Schnittpunkte und -winkel.

(c) Berechnen Sie für jeden Schnittpunkt S zweier Geraden den Abstand zur dritten Geraden und den Punkt auf dieser Geraden, der S am nächsten liegt.

Aufgabe 2.2. Gegeben sind die Geraden

$$\begin{aligned}
g_1\colon \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t_1 \in \mathbb{R}, &\qquad g_2&\colon 6x - 8y = 42, \\
g_3\colon \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ t_3 \in \mathbb{R}, &\qquad g_4&\colon x - 3y = 2, \\
g_5\colon \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix},\ t_5 \in \mathbb{R}, &\qquad g_6&\colon 2x - y = -6.
\end{aligned}$$

(a) Ermitteln Sie Normalformen von g_1, g_3, g_5 und Parameterformen von g_2, g_4, g_6.

(b) Bestimmen Sie alle Lagebeziehungen zwischen den Geraden und alle Schnittwinkel.

(c) Finden Sie alle Schnittpunkte von g_5 mit den anderen Geraden.

(d) Berechnen Sie für jeden Schnittpunkt S aus (c) und jede Gerade g_i mit $i \in \{1, \ldots, 6\}$, auf der S *nicht* liegt, den Abstand zwischen S und g_i und den Punkt auf g_i, der S am nächsten liegt.

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 2.2.

(a) Mögliche Normal- und Parameterformen sind

$$g_1\colon x - 3y = -8, \qquad g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ t_2 \in \mathbb{R},$$

$$g_3\colon 2x - y = 4, \qquad g_4\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t_4 \in \mathbb{R},$$

$$g_5\colon 3x - 4y = -4, \qquad g_6\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t_6 \in \mathbb{R}.$$

Selbstverständlich sind auch andere Darstellungen möglich.

(b) Die Geraden g_1 und g_4 sind parallel, ebenso g_2 und g_5 sowie g_3 und g_6.
Die Winkel zwischen den Geraden sind wie folgt.

- Winkel zwischen g_1/g_4 und g_2/g_5 ist $\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0,32175$ (oder $\approx 18,435°$).
- Winkel zwischen g_1/g_4 und g_3/g_6 ist $\frac{\pi}{4}$ (oder $45°$).
- Winkel zwischen g_2/g_5 und g_3/g_6 ist $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 0,46365$ (oder $\approx 26,565°$).

(c) Die Gerade g_5 schneidet

- in $S_{1,3,5} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Geraden g_1 und g_3;
- in $S_{4,5,6} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Geraden g_4 und g_6.

(d) Der Schnittpunkt $S_{1,3,5}$ von g_1, g_3, g_5

- hat Abstand 5 von g_2 und der Punkt auf g_2 mit diesem Abstand zu $S_{1,3,5}$ is $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- hat Abstand $\sqrt{10}$ von g_4 und der Punkt auf g_4 mit diesem Abstand zu $S_{1,3,5}$ is $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- hat Abstand $2\sqrt{5}$ von g_6 und der Punkt auf g_6 mit diesem Abstand zu $S_{1,3,5}$ is $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt $S_{4,5,6}$ von g_4, g_5, g_6

- hat Abstand $\sqrt{10}$ von g_1 und der Punkt auf g_1 mit diesem Abstand zu $S_{4,5,6}$ is $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- hat Abstand 5 von g_2 und der Punkt auf g_2 mit diesem Abstand zu $S_{4,5,6}$ is $\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$;
- hat Abstand $2\sqrt{5}$ von g_3 und der Punkt auf g_3 mit diesem Abstand zu $S_{4,5,6}$ is $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.