

Tutorium Mathematik I, M

Blatt 3

4. November 2022

***Aufgabe 3.1.** Gegeben sind die Geraden

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_f \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mit $t_f, t_g, t_h \in \mathbb{R}$. Dann ist g windschief zu f und parallel zu h .

- Wie groß ist der kleinste Abstand zwischen einem Punkt auf f und einem Punkt auf g ?
- Berechnen Sie den Abstand von g und h .

Aufgabe 3.2. Gegeben sind die Geraden

$$\begin{aligned} g_1: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in \mathbb{R}, & g_2: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t_2 \in \mathbb{R}, \\ g_3: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t_3 \in \mathbb{R}, & g_4: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t_4 \in \mathbb{R}, \\ g_5: \vec{x} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t_5 \in \mathbb{R}, & g_6: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t_6 \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad t_6 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Untersuchen Sie die Lagebeziehungen dieser Geraden (identisch, parallel, windschief oder genau ein Schnittpunkt).
- Geben Sie für Geraden mit genau einem Schnittpunkt diesen Schnittpunkt an.
- Bestimmen Sie für parallele Geraden ihren Abstand.
- Ermitteln Sie für windschiefe Geraden den kleinsten Abstand, der zwischen Punkten auf ihnen angenommen wird. (Die dazugehörigen Punkte müssen nicht angegeben werden.)

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben können von den Studierenden bearbeitet werden.

Lösungen der nicht vorgerechneten Aufgaben

Lösung von Aufgabe 3.2.

(a) Es gilt $g_3 = g_5$.

Die Geraden g_1, g_4 sind parallel, ebenso sind g_2, g_6 parallel.

Genau einen Schnittpunkt gibt es jeweils zwischen

- g_1 und g_6 .
- g_2 und $g_3 = g_5$,
- g_2 und g_4 ,
- $g_3 = g_5$ und g_4 ,
- $g_3 = g_5$ und g_6 .

Windschief sind

- g_1 und g_2 ,
- g_1 und $g_3 = g_5$,
- g_4 und g_6 .

(b) Der Schnittpunkt zwischen g_1 und g_6 ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Die drei Geraden $g_2, g_3 = g_5$ und g_4 schneiden einander im Punkt $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt zwischen $g_3 = g_5$ und g_6 ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(c) Der Abstand zwischen g_1 und g_4 ist $\sqrt{\frac{169}{2}} = \frac{13}{\sqrt{2}}$.

Der Abstand zwischen g_2 und g_6 ist $\sqrt{\frac{720}{7}} = 12\sqrt{\frac{5}{7}}$.

(d) Der kleinste Abstand zwischen Punkten auf g_1 und g_2 ist $\frac{52}{\sqrt{35}}$.

Der kleinste Abstand zwischen Punkten auf g_1 und $g_3 = g_5$ ist $\frac{13}{\sqrt{29}}$.

Der kleinste Abstand zwischen Punkten auf g_4 und g_6 ist $\frac{52}{\sqrt{35}}$.