

Mathematik I WS 2022/23

0. Übungsblatt

18.10.2022

Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt sind freiwillig! In der ersten Übungseinheit werden nach freiwilliger Meldung unter den anwesenden Personen Leute zum Präsentieren der Lösungen ausgewählt, die dafür auch Tafelpunkte erhalten.

Aufgabe 0.1. Schreiben Sie die folgenden Summen mit Hilfe des \sum -Zeichens:

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1810}$

(b) $\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + 3 + 9 + \dots + 3^n$

(c) $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + \dots + 2022$

(d) $2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + \dots + 10100$

Aufgabe 0.2. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

gilt.

Aufgabe 0.3. Bei einer Lottoziehung „6 aus 45“ werden aus den Zahlen 1, 2, 3, ..., 45 sechs (verschiedene) Zahlen zufällig ausgewählt. Die Reihenfolge der ausgewählten Zahlen spielt dabei keine Rolle. Außerdem wird eine siebte Zahl (verschieden von den sechs ersten Zahlen) gezogen, die „Zusatzzahl“. An der Lotterie nimmt teil, wer einen Tipp mit 6 angekreuzten Zahlen abgibt.

- (a) Wie viele Kombinationen von 6 Zahlen kann man ankreuzen? Wenn Sie jedes Monat achtmal jeweils 12 Tipps abgeben, wie lange können Sie dann spielen, ohne eine Kombination zu wiederholen?
- (b) Wie viele verschiedene Ergebnisse der Ziehung „6 aus 45 plus Zusatzzahl“ gibt es? Wenn Sie genau einen Tipp abgegeben haben, wie wahrscheinlich ist es, dass Sie einen „Fünfer plus Zusatzzahl“ haben, d.h. dass Sie die Zusatzzahl sowie 5 weitere gezogene Zahlen angekreuzt haben?

Aufgabe 0.4. Seien A die Menge aller durch 3 teilbaren Zahlen, B die Menge aller durch 6 teilbaren Zahlen und C die Menge aller durch 9 teilbaren Zahlen. Geben Sie die Mengen

$$A \cup B, \quad B \cup C, \quad C \cup A, \quad A \cap B, \quad B \cap C \quad \text{und} \quad C \cap A$$

in der Schreibweise $\{x \in \mathbb{Z} \mid \dots\}$ an und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich. Bestimmen Sie, welche der vorkommenden Mengen Teilmengen der anderen sind.

Aufgabe 0.5. Vier Personen streiten sich, wer von ihnen recht hat:

- „Eine gerade Anzahl von uns haben recht“ behauptet Alice.
- „Mindestens einer von Charlie und David lügt“, meint Bob.
- Charlie sagt: „Alice spricht die Wahrheit.“
- Schließlich meint David: „Von den anderen drei Personen lügen alle.“

Lässt sich eindeutig feststellen, wer gelogen hat? Falls ja, wer?