Mathematik I WS 2022/23
10. Übungsblatt
17.01.2023

Aufgabe 10.1. Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und sämtliche Asymptoten (vertikale und horizontale Asymptoten sowie Asymptoten der Form $y = ax + b$) der Funktion

$$f(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 2x}{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}.$$

Aufgabe 10.2. Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und sämtliche Asymptoten (vertikale und horizontale Asymptoten sowie Asymptoten der Form $y = ax + b$) der Funktion

$$f(x) = \left(3x + 1 - \frac{4}{x^3}\right)\left(1 - e^{(-x^2)}\right).$$

Aufgabe 10.3. Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und sämtliche Asymptoten (vertikale und horizontale Asymptoten sowie Asymptoten der Form $y = ax + b$) der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3\left(5 - \frac{1}{\ln(x^2)}\right)}{x^2 - 6x + 10}.$$

Aufgabe 10.4. Bestimmen Sie die größtmöglichen Mengen D und W, sodass

$$f\colon D \to W, \qquad x \mapsto \frac{2 - 7x}{x - 8}$$

bijektiv ist. Geben Sie auch die Umkehrfunktion f^{-1} an.
Ermitteln Sie anschließend für f und f^{-1} jeweils alle Asymptoten.

Aufgabe 10.5. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(3x) - 6x}{x^3} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2\cosh(x) - x\sinh(x) - 2}{e^{(x^2)} - 1 - x\ln(1 + x)},$$

indem Sie in Zähler und Nenner jeweils die ersten Summanden der Taylorreihen (d.h. die ersten Summanden $a_n x^n$ in den Taylorreihen, für die $a_n \neq 0$ ist) bestimmen.
Hinweis: Berechnen Sie die Taylorreihen nicht anhand der Definition, sondern verwenden Sie Taylorreihen, die aus dem Skript oder der Vorlesung bekannt sind.

Aufgabe 10.6. Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche (die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe konvergiert) für die Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n x^n}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n (x+1)^n}{3^n (n+4)} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n (3x-1)^n}{9^n (n^2 + 2n - 1)}.$$