

Mathematik I WS 2022/23
12. Übungsblatt
31.01.2023

Aufgabe 12.1. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2} dx$$

mit Hilfe der Substitution $x = \cos(\alpha)$.

Aufgabe 12.2. Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{8x}{x^2 - 9}.$$

Berechnen Sie im Intervall $[-2, 2]$ den Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g .

Aufgabe 12.3. Untersuchen Sie, ob die Integrale

$$\int_0^\pi \tan(x) dx, \quad \int_{-3}^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{\pi \ln(x)}{2(\cos(\frac{\pi}{2}x))^2} + \frac{\tan(\frac{\pi}{2}x)}{x} dx$$

existieren und geben Sie gegebenenfalls ihre Werte an.

Hinweis für das letzte Integral: Zeigen Sie zunächst $\int \frac{\tan(\frac{\pi}{2}x)}{x} dx = \ln(x) \tan(\frac{\pi}{2}x) - \int \frac{\pi \ln(x)}{2(\cos(\frac{\pi}{2}x))^2} dx$.

Aufgabe 12.4. Ermitteln Sie durch Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{13 - 25x}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}.$$

Untersuchen Sie danach, ob die Integrale

$$\int_7^\infty f(x) dx, \quad \int_5^7 f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_3^7 f(x) dx$$

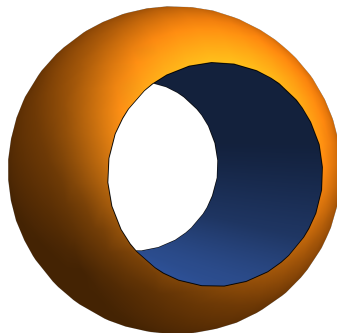
existieren und geben Sie gegebenenfalls die Werte der Integrale an.

Aufgabe 12.5. Untersuchen Sie, ob die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3/x}}{x^2} dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-3/x}}{x^2} dx$$

existieren und geben Sie gegebenenfalls die Werte der Integrale an.

Aufgabe 12.6. In eine Kugel mit Radius 5 wird ein Loch mit Radius 3 gebohrt, welches durch den Mittelpunkt der Kugel verläuft. Es verbleibt ein ringförmiger Körper R , der wie folgt aussieht.



Berechnen Sie anhand der Formeln für Rotationskörper das Volumen und den Oberflächeninhalt von R .