

Mathematik I WS 2022/23

3. Übungsblatt

15.11.2022

Aufgabe 3.1. Betrachten Sie die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ -8 \\ 24 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Schneiden g und h einander? Falls ja, geben Sie den Schnittpunkt und Schnittwinkel an. Falls sie einander nicht schneiden, geben Sie ihren minimalen Abstand an, sowie die Punkte auf den Geraden, welche diesen Abstand zueinander haben.

Aufgabe 3.2. Gegeben seien der Punkt $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

und die Ebene

$$\epsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Abstand von P zu g und von P zu ϵ . Berechnen Sie außerdem die Punkte auf g bzw. ϵ , die P am nächsten liegen.

Aufgabe 3.3. Die Ebene

$$\epsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

ist in Parameterform gegeben. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in Normalform. Bestimmen Sie außerdem den Schnittpunkt von ϵ mit der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

sowie den Winkel, in welchem ϵ und g einander schneiden.

Aufgabe 3.4. Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

- Rechnen Sie nach, dass die beiden Geraden g und h parallel sind und Abstand 3 zueinander haben.
- Bestimmen Sie die Ebene, welche parallel zu g und h ist, zu g Abstand 9 hat und zu h Abstand 6.

Aufgabe 3.5. Gegeben seien die Ebenen

$$\epsilon_1: x + y + z = -1 \quad \text{und} \quad \epsilon_2: x + 2y + 5z = -3.$$

- (a) Bestimmen Sie jeweils eine Parameterform von ϵ_1 und ϵ_2 .
- (b) Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der beiden Ebenen.

Aufgabe 3.6. Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ (Ecken in dieser Reihenfolge) und Spitze S sind die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Ferner ist bekannt, dass die Grundfläche in der Ebene

$$\epsilon: 2x - y + 2z = 22$$

liegt und die Höhe, d.h. der Abstand von S zu ϵ , gleich 12 ist. Bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte der Pyramide.

Hinweis: Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche heißt *gerade*, falls die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt. Es gibt mehrere Möglichkeiten für die Koordinaten von C , D und S , abhängig von der „Orientierung“ des Quadrats $ABCD$ und der Spitze S . Es genügt, wenn Sie eine Möglichkeit bestimmen.