Mathematik I WS 2022/23
4. Übungsblatt
22.11.2022

Aufgabe 4.1. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

$$a_n = \frac{3n^2-1}{4n^2+1}\,, \qquad b_n = \frac{5n^2+7}{2n^3+7n^2-n+8}\,, \qquad c_n = \frac{4^{n+2}-3^{n+3}}{3^{n+1}+2^{2n-1}}\,, \qquad d_n = \frac{6^{n-2}+8^{n+3}}{5^{n+1}-(-7)^{n+2}}\,.$$

Aufgabe 4.2. Gegeben sind die Zahlen $a, c, q \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < q < 1 < c$ und $b \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$|a_n| \leq q$$

für alle $n \geq N$ gilt und folgern Sie daraus, dass $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^n = 0$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a), dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{c^n} = 0$.

Hinweis: Sie dürfen den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ verwenden.

Aufgabe 4.3. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(a) $a_n = \sqrt{6n-5} - \sqrt{6n+7}$;

(b) $b_n = \sqrt{22n-11} - \sqrt{20n+22}$;

(c) $c_n = \dfrac{(n^7+2n^2)3^n + n^2 4^{n+1}}{5^{n-2}}$.

Hinweis für (c): Verwenden Sie Aufgabe 4.2 (b).

Aufgabe 4.4. Welche dieser Folgen sind monoton? Welche sind beschränkt? Welche sind nur nach oben oder unten beschränkt?

(a) $a_n = (-1)^n \dfrac{3n-5}{2n+1}$;

(b) $b_n = \dfrac{5n^2+18n-9}{n+4} - \dfrac{3n^2+4n+5}{n+1}$.

Aufgabe 4.5. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit

$$a_0 = 2 \qquad \text{und} \qquad a_n = -\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \cdot a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

(a) Verwenden Sie die Rechenregeln für konvergente Folgen, um folgende Behauptung zu zeigen:
Falls $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass $a_n = (-1)^n \dfrac{n+2}{n+1}$ gilt.

(c) Ermitteln Sie sämtliche Häufungspunkte, den Limes Superior und den Limes Inferior der Folge.

Aufgabe 4.6. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist rekursiv durch

$$a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 16 \quad \text{und} \quad a_n = -a_{n-1} + 9a_{n-2} + 9a_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3$$

definiert.

(a) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung für a_n.

(b) Ermitteln Sie sämtliche Häufungspunkte, den Limes Superior und den Limes Inferior der Folge.