Mathematik I WS 2022/23
5. Übungsblatt
29.11.2022

Bemerkung: Sie dürfen folgende „abgeschwächte" Formen des Majoranten-, Minoranten- und Leibniz-Kriteriums in den folgenden Beispielen (und den Klausuren und Prüfungen) ohne Beweis verwenden:

- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn es eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq N$ (Majorantenkriterium);
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, wenn es eine divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $0 \leq b_n \leq a_n$ für alle $n \geq N$ (Minorantenkriterium);
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und ab einem Index $N \in \mathbb{N}$ monoton ist (Leibniz-Kriterium).

In anderen Worten, die Bedingungen von Majoranten-, Minoranten- und Leibniz-Kriterium müssen nicht unbedingt schon ab $n = 1$ gelten, sondern es genügt, wenn sie ab einem Index $N \in \mathbb{N}$ erfüllt sind.

Aufgabe 5.1. Gegeben sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit

$$a_n = \frac{(n + \cos(n))^7}{(n - \sin(n))^9} \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{(n - \cos(n))^5}{(n + \sin(n))^6}.$$

Überprüfen Sie die Reihen anhand folgender Schritte auf Konvergenz:

(a) Zeigen Sie, dass Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 1$ gilt und $a_n = \frac{c_n}{n^2}$ sowie $b_n = \frac{d_n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass es Indizes $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_n| \leq \frac{2}{n^2}$ für alle $n \geq N_a$ und $b_n \geq \frac{1}{2n}$ für alle $n \geq N_b$. Begründen Sie anhand dieser Tatsachen, ob $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert oder divergiert.

Aufgabe 5.2. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{5n^2 + 9n + 1} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + 7}{3n^2 + 42}$$

Aufgabe 5.3. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3n)!}{3^{2n}(n!)^3} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n!)^2}{n^3(2n-1)!}$$

Aufgabe 5.4. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5 + \sqrt{9n}}{2 + 4\sqrt{n}}\right)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 12 \cdot (-1)^n n}{(n+3)(2n+5)}\right)^n$$

Aufgabe 5.5. Bestimmen Sie die Werte der beiden konvergenten Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n + 5 \cdot 2^{n+1}}{7^n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + \sin(\pi/2 + n\pi)\, 2^{2n+1}}{4^{n-1} n}.$$

Aufgabe 5.6. Gegeben sei die alternierende Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \cdots,$$

wobei wir den Betrag des n-ten Summanden mit a_n bezeichnen.

(a) Geben Sie eine explizite Darstellung für a_n an und begründen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Zeigen Sie zudem, dass es kein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab dem Index N monoton ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 2$ die $2n$-te Partialsumme

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

der Reihe größer oder gleich $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}$ ist. Folgern Sie daraus, dass die Reihe divergiert.