

Mathematik I WS 2022/23

6. Übungsblatt

6.12.2022

Bei den Aufgaben auf diesem Blatt dürfen Sie keine Differentialrechnung verwenden!

Aufgabe 6.1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Exponentialfunktion die Grenzwerte

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n} \qquad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n+2}\right)^n$$

und zeigen Sie, dass die Reihe

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} 20^n \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe 6.2. Welche der folgenden Funktionen sind symmetrisch (gerade), welche sind schief-symmetrisch (ungerade)? Weisen Sie jeweils nach, dass die betreffende Eigenschaft gilt bzw. nicht gilt.

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(x) \qquad g(x) = \frac{4x^3 - 3x}{3x^2 + 2 + 5e^{x^2}} \qquad h(x) = \frac{1 + 3 \sinh(x)^2}{2 \cosh(x) - 1}$$

Aufgabe 6.3. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{3x^2 - 10x - 1}{x - 3}$ den maximalen Definitionsbereich sowie die größtmöglichen Intervalle, auf denen sie monoton ist.

Aufgabe 6.4. Welche der Funktionen

$$\begin{array}{ll} f(x): [0, \infty) \rightarrow [-1, 0] & x \mapsto e^{-x} - 1 \\ g(x): [3, 5] \rightarrow [3, 9] & x \mapsto \sqrt{x^2 - 9} + x \\ h(x): \mathbb{R} \rightarrow [5, \infty) & x \mapsto 3x^2 + 5 \end{array}$$

sind bijektiv?

- (a) Für diejenigen Funktionen, die *nicht* bijektiv sind, begründen Sie, warum dies der Fall ist.
- (b) Für diejenigen Funktionen, die bijektiv sind, ermitteln Sie die Umkehrfunktion.

Hinweis. Für die Argumentation kann es hilfreich sein, zuerst zu zeigen, dass die Funktion streng monoton ist.

Aufgabe 6.5. Berechnen Sie – nur mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen – die Identitäten

- (a) $\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$,
- (b) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$,
- (c) $\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = 2(\cos(x))^2 - 1$,
- (d) $1 + (\cot(x))^2 = \frac{1}{(\sin(x))^2}$.

Aufgabe 6.6. Begründen Sie anhand der Definitionen der hyperbolischen Funktionen die Formeln

- (a) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$,
- (b) $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$.