Mathematik I WS 2022/23
7. Übungsblatt
13.12.2022

Bei den Aufgaben auf diesem Blatt dürfen Sie keine Differentialrechnung verwenden!

Aufgabe 7.1. Begründen Sie welche der folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x}{\sqrt{4x^2+9}}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{\cosh(x)}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{1+\frac{1}{x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x+7}{x^2+2x+9}$

Hinweis. Wir sagen, dass eine Funktion f den Grenzwert c für $x \to \infty$ hat, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ die Beziehung $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ gilt. Der Grenzwert für $x \to -\infty$ ist analog definiert.

Aufgabe 7.2. Für welche Werte $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

$$f(x) = \begin{cases} \sin(ax) + 4 & \text{für } x \leq 0 \\ b \cdot \frac{x^2-3x+c}{x-5} & \text{für } 0 < x < 5 \\ x^2 - 2x + \frac{d}{x} & \text{für } x \geq 5 \end{cases}$$

Aufgabe 7.3. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c}{x^3 - 9x}.$$

Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge D für f. Für welche Werte von a, b und c ist die Funktion f für alle Punkte in $\mathbb{R} \setminus D$ stetig fortsetzbar?

Aufgabe 7.4. Sei

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^3 + x^2 - 5x + 3}.$$

Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge D für f. An welchen Punkten in $\mathbb{R} \setminus D$ ist f stetig fortsetzbar? Geben Sie für diese Punkte den dazugehörigen Funktionswert der stetigen Fortsetzung an.

Aufgabe 7.5. Sei

$$f(x) = \frac{e^{3x} - 9e^{2x} + 15e^x - 7}{e^{3x} + 3e^{2x} - 9e^x + 5}.$$

Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge D für f. An welchen Punkten in $\mathbb{R} \setminus D$ ist f stetig fortsetzbar? Geben Sie für diese Punkte den dazugehörigen Funktionswert der stetigen Fortsetzung an.

Aufgabe 7.6. Gegeben sei die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^x x - 1.$$

(a) Begründen Sie, dass f eine Nullstelle hat.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Bisektionsverfahrens einen Nährerungswert für eine Nullstelle von f. Verwenden Sie für die Genauigkeitsrate $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

(c) Wie viele Iterationen des Bisektionsverfahrens müssten Sie mindestens durchführen, wenn die Abweichung maximal 10^{-9} betragen dürfte?