

Mathematik I WS 2022/23

8. Übungsblatt

20.12.2022

Aufgabe 8.1. Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen anhand der Ableitungsregeln. Dabei dürfen nur die Ableitungen von e^x , $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ und von Polynomen als bekannt vorausgesetzt werden.

(a) $f_1(x) = x \cdot (\ln(x) - 1)$

(b) $f_2(x) = \cos\left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{e^{2x}}\right)$

(c) $f_3(x) = \sin(x)e^{\cos(x)}$

Aufgabe 8.2.

- (a) Gegeben sind zwei auf ganz \mathbb{R} differenzierbare Funktionen f_1, f_2 mit der Eigenschaft $f_1(0) = f_2(0)$. Rechnen Sie nach, dass für die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \leq 0, \\ f_2(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

die Beziehungen

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f_1'(0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f_2'(0)$$

gelten.

- (b) Überprüfen Sie mit Hilfe von (a), ob die Funktionen $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \frac{1}{1 + |x|} \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert der Ableitung.

Aufgabe 8.3. Finden Sie ein Polynom dritten Grades, welches im Punkt $x_1 = 2$ den Funktionswert -2 und die Ableitung -3 hat sowie im Punkt $x_2 = 3$ den Funktionswert 2 und die Ableitung 13 .

Aufgabe 8.4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und ermitteln Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^2 - 2 \cos(x)}{x^3 - x^4}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 9^+} (\ln(\sqrt{x} - 3) - \ln(x - 9))$

Aufgabe 8.5. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und ermitteln Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x) - \sqrt{x})$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Aufgabe 8.6. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und ermitteln Sie gegebenenfalls ihren Wert.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x - 1 - \cos(x)}{5x^3 + 3x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan \left(\frac{\pi x}{2} \right) \ln (x^{2022}) \right)$$