Mathematik II, M, Sommersemester 2023
1. Übungsblatt
16.3.2023

Aufgabe 1.1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Produkt $A^\top \cdot A \cdot A^\top$ einmal als $(A^\top \cdot A) \cdot A^\top$ und einmal als $A^\top \cdot (A \cdot A^\top)$. Vergleichen Sie den Rechenaufwand.

Aufgabe 1.2. Ermitteln Sie die Ränge der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.3. Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.4. Formulieren Sie das folgende Gleichungssystem in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ und bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

$$\begin{aligned} x + 3z &= 4 \\ -2x + y &= -10 \\ 5x - 4y + 4z &= 28 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.5. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & 9 & -10 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 19 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 19 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}_1$ und $A\vec{x} = \vec{b}_2$.

Aufgabe 1.6. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie die erweiterten Matrizen $(A|I_3)$ und $(B|I_3)$ mittels elementarer Zeilenumformungen jeweils auf die Form $(D|C)$, wobei die Matrix D Zeilenstufenform hat.

(b) Entscheiden Sie mit Hilfe von (a), welche der Matrizen A und B invertierbar sind.

(c) Sofern möglich, berechnen Sie die inversen Matrizen von A und B, indem Sie $(D|C)$ mittels elementarer Zeilenumformungen auf die Form $(I_3|F)$ bringen.