Mathematik II, M, Sommersemester 2023
10. Übungsblatt
15.6.2023

Aufgabe 10.1. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + \frac{13}{2}x - y^2$$

auf der Menge $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 4y^2 \leq 36\}$.

Aufgabe 10.2. Bestimmen Sie alle Extremstellen und deren Typ (Maximum oder Minimum, global oder nur lokal) von

$$f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^3$$

auf der Menge $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y \leq 1\}$.

Aufgabe 10.3. Bestimmen Sie alle Extremstellen und deren Typ (Maximum oder Minimum, global oder nur lokal) von

$$f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 1)$$

auf der Kreisscheibe $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 10.4. Bestimmen Sie alle Extremstellen und deren Typ (Maximum oder Minimum, global oder nur lokal) von

$$f(x,y) = xe^y - x - 2y$$

auf der Menge $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 6\}$.

Hinweis. Wenn Sie einen Punkt (x_0, y_0) finden, der auf dem Rand von D ein Maximum ist, versuchen Sie zu zeigen, dass für (x,y) nahe genug bei (x_0, y_0) immer $f(x,y) \leq f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0)$ gilt. Bei einem Minimum sollten die Ungleichungen in die andere Richtung gehen.

Aufgabe 10.5. Bestimmen Sie alle Lösungen der Bernoullischen Differentialgleichung

$$xy' - 4y - x^2y^3 = 0.$$

Geben Sie für jede der gefundenenen Lösungen den größtmöglichen Definitionsbereich an.

Aufgabe 10.6. Ermitteln Sie für die folgenden Riccatischen Differentialgleichungen eine partikuläre Lösung und formen Sie diese damit in eine Bernoullische Differentialgleichung um. Diese muss dann *nicht* gelöst werden.

(a) $y' + (x+8)y - xe^{2x}y^2 = 42(1-x)e^{-2x}$;

(b) $2x^2y' + xy - y^2 = 20x - 16$.

Hinweis: Standardansätze sind $y = ax^b$, $y = ae^{bx}$ oder $y = ax + b$.