

**Mathematik II, M, Sommersemester 2023**  
**11. Übungsblatt**  
**22.6.2023**

**Aufgabe 11.1.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Differentialgleichungen exakt sind und bestimmen Sie ihre Lösungen (gegebenenfalls mit Hilfe eines integrierenden Faktors). Ermitteln Sie diejenigen Lösungen, die  $y(1) = -1$  erfüllen und lösen Sie für diese Lösungen jeweils die impliziten Gleichungen  $f(x, y) = c$  nach  $y$  auf.

(a)  $\frac{\sinh(y)}{\cosh(x)} - \frac{\cosh(y)}{\sinh(x)}y' = 0$  mit  $x > 0$ ;

(b)  $\frac{2x}{y} + \frac{2y^3 - x^2}{y^2}y' = 0$  mit  $x > 0$ .

**Aufgabe 11.2.** Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen sowie ihre Einhüllenden. Stellen Sie dabei die Einhüllenden in der Form  $y = f(x)$  oder  $x = g(y)$  dar. Skizzieren Sie die Lösungen der Differentialgleichungen und ihre Einhüllenden.

(a)  $y = xy' + \frac{1}{y'}$ ;

(b)  $y = xy' + e^{-y'}$ .

**Aufgabe 11.3.** Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

(a)  $y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ;

(b)  $y'' = \frac{2y'}{x} + x^2$  für  $x > 0$ ;

(c)  $y'' = \frac{(y')^2}{y+2}$ .

**Aufgabe 11.4.** Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen für  $x > 0$ .

(a)  $x^3y''' + 3x^2y'' - 3xy' = 0$ ;

(b)  $x^3y''' + 2x^2y'' - 5xy' - 3y = 0$ .

**Aufgabe 11.5.** Berechnen Sie das Integral der Funktion

$$f(x, y) = \frac{8x^3}{(4 - x^2y)^2}$$

über dem Rechteck  $Q = [0, 1] \times [0, 2]$

- indem Sie zuerst  $F(x) := \int_0^2 f(x, y) dy$  und danach  $\int_0^1 F(x) dx$  berechnen;
- indem Sie zuerst  $G(y) := \int_0^1 f(x, y) dx$  mit Hilfe der Substitution  $u = x^2y$  berechnen und danach  $\int_0^2 G(y) dy$  durch partielle Integration ermitteln.

Vergleichen Sie den Rechenaufwand für die beiden Lösungswege.

**Aufgabe 11.6.** Integrieren Sie die Funktionen

$$f(x, y) = x \cos(y)e^{(-x^2)} + y^3 \sin(x) + xy$$

$$g(x, y) = \sin(x + y) + \cos\left(x + \frac{y}{4}\right)$$

jeweils über dem Rechteck  $Q = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ .

*Hinweis.* Wenn Sie sich zuerst Gedanken über die Reihenfolge der Integration machen, könnte die Rechnung einfacher werden.