Mathematik II, M, Sommersemester 2023
12. Übungsblatt
29.6.2023

Hinweis: Man kann sich oft Arbeit sparen, wenn man sich zuerst Gedanken über die Form der Integrationsbereiche, die verwendeten Koordinaten und die Integrationsreihenfolge macht. Manchmal kann man den Wert des Integrals sogar ohne jegliche Rechnung erkennen.

Aufgabe 12.1. Berechnen Sie die Integrale

$$\iint_{B_1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \iint_{B_2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{und} \qquad \iint_{B_2} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

wobei B_1 das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ bezeichnet und B_2 der Kreis mit Radius 2 um den Koordinatenursprung ist.

Aufgabe 12.2. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_{B} 8xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

wobei

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1 \geq y^2) \wedge (y \leq 5-x) \wedge (x \leq 2y+2)\}.$$

Aufgabe 12.3. Berechnen Sie die Masse des Körpers

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (0 \leq z \leq 1) \wedge (x^2+y^2 \leq (1-z)^4)\}$$

mit konstanter Dichte $\rho = 1$. Ermitteln Sie anschließend die z-Koordinate seines Schwerpunktes und das Trägheitsmoment bei Rotation um die z-Achse.
Hinweis: Zylinderkoordinaten

Aufgabe 12.4. Berechnen Sie mit Hilfe von Kugelkoordinaten die Masse des Körpers

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4) \wedge (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \wedge (z \geq 0)\},$$

wobei die Dichtefunktion $\rho(x,y,z)$ wie folgt definiert ist.

(a) $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

(b) $\rho(x,y,z) = z$,

(c) $\rho(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$.

Aufgabe 12.5. Ein Torus[1]

$$T = \{(x,y,z) \mid (x^2+y^2+z^2+8)^2 \leq 36(x^2+y^2)\}$$

kann durch die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x(r,\varphi,\theta) \\ y(r,\varphi,\theta) \\ z(r,\varphi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+r\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ (3+r\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

mit $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$ und $\theta \in [0,2\pi]$ beschrieben werden. Berechnen Sie die Jacobideterminante dieser Koordinatentransformation und ermitteln Sie das Volumen von T.

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Torus`

Aufgabe 12.6. Gegeben sind die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit D bezeichnen wir das Dreieck mit Ecken A, B, C und mit $\mathcal{C}$ den Rand von D, wobei die Ecken A, B, C in dieser Reihenfolge durchlaufen werden. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} xe^{x^2+y^2} \\ ye^{x^2+y^2} \\ z \end{pmatrix} \, \mathrm{d}\vec{x}$$

(a) anhand der Definition von Kurvenintegralen;

(b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.